

aula matemática digital



SEPTIEMBRE 2007

NÚMERO 1

EDITORIAL

Ha nacido una nueva revista de actualidad matemática, bajo la atenta mirada del futuro Palacio de Congresos Princesa Letizia de Oviedo (Asturias), del insigne arquitecto Santiago Calatrava, premio Príncipe de Asturias de las Artes 1999, símbolo de modernidad.

Su título "**Aula matemática digital**" es toda una declaración de intenciones. Pretendemos mantener actualizada la comunidad educativa respecto a la utilización de las nuevas tecnologías en el aula, últimas noticias, novedades importantes, actualidad, Congresos y Jornadas, artículos con actividades diseñadas especialmente con calculadoras, no sólo para el área de Matemáticas sino de otras disciplinas como Tecnología, Física, Química... para lo que contaremos con expertos colaboradores, así como una sección para la publicación de los mejores trabajos presentados por los propios lectores, a los que intentaremos premiar de alguna manera.

No dejaremos de lado el tema de la Programación y el diseño de programas.

También dedicaremos una página de carácter más lúdico en el que analizaremos, de forma monográfica, la presencia de las Matemáticas en el Cine, además de hacer algunas recomendaciones de Literatura matemática.

Otro reto importante será la formación del profesorado a través de cursos presenciales y cursos ONLINE. Pretendemos ser el escaparate del sitio www.aulamatematica.com dónde podréis ampliar los temas de más interés.

También "nacerán" otras secciones, ahora inimaginables, pues LA AVENTURA NO HA HECHO MÁS QUE EMPEZAR.

SUMARIO

01 Editorial

02 Monográfico:

Matemáticas y TIC. ¿Modificarán las nuevas tecnologías el currículo de las Matemáticas?. Las matrices

63 Literatura matemática.

64 Matemáticas y Cine

65 CASIO lanza dos joyas para el aula:

• El software del emulador FX - ES para PC

• La FX-9860G Slim

66 Página index de www.aulamatematica.com

Dirección:

Abel Martín

Consejo de Redacción:

Ángel Aguirre Pérez

Rosana Álvarez García

Marta Martín Sierra

Álvaro Valdés Menéndez

ISSN: 1988-379X

Depósito Legal: AS-5119-2007

Edita: www.aulamatematica.com



Suscripción gratuita

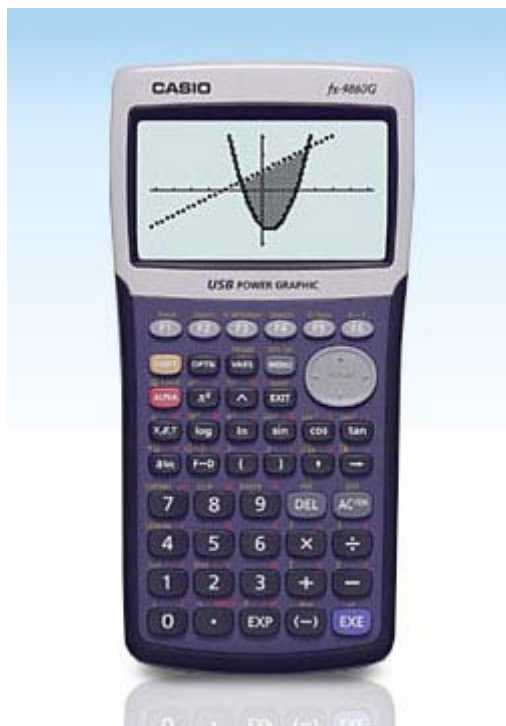


Ángel Aguirre Pérez
Rosana Álvarez García
Álvaro Valdés Menéndez
Abel Martín Álvarez

Hemos escogido para este primer número un tema amplio, con carácter monográfico, con los materiales elaborados el curso pasado 2006/2007, por parte de la mayoría de los que conformamos este Consejo de Redacción inicial y que pertenecíamos a un Grupo de Trabajo, coordinado por el Centro de Profesores y Recursos del Nalón Caudal, cofinanciado por la Asesoría Didáctica de Casio - Flamagás, bajo el título:

Matemáticas y TIC. ¿Modificarán las NNTT el currículo de las Matemáticas?. Las Matrices.

Utilizaremos fundamentalmente la calculadora fx 9860G SD de CASIO para el desarrollo de las sesiones. No dispone de cálculo simbólico para que pueda ser autorizado en las pruebas PAU, como ocurre en el resto de España e incluye otras aplicaciones como la de geometría dinámica.



Justificación del proyecto.

El informe PISA asegura que es necesario mejorar la calidad de la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Hay que encontrar el modelo que haga recuperar a nuestros estudiantes la satisfacción

por el dominio de las herramientas matemáticas y la autoestima por abordar y resolver problemas.

También determina que la no existencia de un plan de formación para profesores, que contemple los avances sobre el currículo de matemáticas y la incorporación de nuevas tecnologías, dificulta la tarea del profesorado.

Por otro lado, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas recomienda la integración de las calculadoras dentro del programa de matemáticas escolares en todos los niveles.

Tanto la investigación como la experiencia apoyan el potencial que tiene el uso apropiado de las calculadoras para mejorar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Este grupo de trabajo quiere desarrollar el uso de este recurso relacionado con las nuevas tecnologías. Aunque en las actividades nos centraremos en las calculadoras gráficas, no serán de uso exclusivo, pudiendo incorporar otras técnicas como el uso de aplicaciones informáticas. Esto no supone un cambio en la metodología actual sino un complemento de ella.

"Hemos utilizado como herramienta auxiliar una calculadora gráfica"

Los recursos elaborados pretenden dos objetivos claramente diferenciados:

- Que todos los estudiantes puedan experimentar y explorar ideas matemáticas; desarrollarse, realizar cálculos y reforzar habilidades; recuperando la satisfacción por el dominio de las matemáticas y su autoestima.

- Que todos los estamentos implicados reflexionen en los obstáculos puestos para la incorporación de las TIC al currículo de las matemáticas; en particular cómo es posible que algunas Consejerías de Educación impidan el uso de calculadoras gráficas en la pruebas de acceso a la universidad?

Reflexionemos sobre el siguiente texto demoledor que aparece en las pruebas PAU de matemáticas de la Universidad de Oviedo donde curiosamente, como ocurre todavía en algunas Comunidades Autónomas españolas, la calculadora gráfica está absolutamente prohibida:

"... se harán prevalecer siempre los planteamientos y desarrollos correctos sobre los cálculos matemáticos, así como se valorarán los razonamientos que utilice el alumno tanto en la resolución de problemas como en las respuestas a cuestiones teóricas".

Qué se pretende conseguir a lo largo del curso con el desarrollo de este proyecto?

Se pretende:

- Elaborar materiales curriculares para alumnos de Educación Secundaria y en especial para el Bachillerato.
- Aplicar y utilizar en el aula los materiales elaborados.

Evaluar la utilidad y la adecuación de dichos materiales.

Recopilar materiales y bibliografía relacionada con el tema.

Conseguir una formación de los integrantes del grupo de trabajo a través del intercambio de experiencias.

Elevar el gusto por las matemáticas de nuestros alumnos, incrementando el porcentaje dedicado en el aula a la reflexión y a la toma de decisiones, objetivos prioritarios del currículo.

Descripción del Proyecto

El proyecto consiste en la elaboración de actividades complementarias a las unidades didácticas de los cursos del Bachillerato, en las que el uso de las TIC aporte una nueva visión al estudiante. Una visión más motiva-

dora y en las que las dificultades operacionales sean superadas por el adecuado uso de las calculadoras y/o aplicaciones informáticas.

En especial, ejemplos cuya complejidad operacional o manipulativa puedan hacerlos poco aconsejables para estos niveles y que, sin embargo, la sencillez de los conceptos los recomiende.

Dinámica del trabajo.

Propuesta de la unidad didáctica a trabajar en la próxima reunión del grupo. Búsqueda de problemas y materiales, pertenecientes a dicha unidad, que sirvan al propósito del grupo de trabajo. Puesta en común de las aportaciones de los distintos miembros del grupo de trabajo: de sus experiencias, materiales y todo aquello relacionado con los contenidos propuestos. En esta fase el contacto con el resto de los miembros se hará fundamentalmente a través de mensajes electrónicos y grupos en Internet.

En las reuniones presenciales se pretende hacer puestas en común e intercambio de información de forma directa, así como la elaboración conjunta de materiales.

Por último se intentarán llevar al aula los diversos materiales para su valoración.

Necesidades de apoyo, asesoramiento y recursos

Planteamos la necesidad de coordinación y asesoramiento por parte del Centro de Profesorado y Recursos del CPR Caudal - Nalón, para la utilización de recursos bibliográficos y de reprografía, así como el apoyo de la asesoría Didáctica de CASIO - Flamagás en recursos materiales y humanos.

Tras la primeras reuniones y deliberaciones del grupo, el tema elegido ha sido:

Las matrices.





LAS MATRICES



Introducción a las matrices.

- Actividad inicial mediante resolución aritmética.

- Representaciones tabulares.

- Concepto de matriz.

- Terminología:

- Elemento, fila, columna y dimensión u orden.

- Representación algebraica de una matriz.

- Igualdad de matrices.

- Introducción de los elementos de una matriz en una calculadora científica.

- Tipos de matrices.

- Matriz fila, matriz columna, matriz rectangular, matriz cuadrada (diagonal principal y diagonal secundaria), matriz triangular superior, matriz triangular inferior, matriz triangular, matriz diagonal, matriz escalar, matriz unidad, matriz nula, matriz traspuesta (propiedades), matriz simétrica, matriz opuesta, matriz antisimétrica.

- Operaciones con matrices.

- Suma de dos matrices. Propiedades.

- Diferencia de dos matrices.

- Suma algebraica de matrices.

- Producto de un número por una matriz.

Propiedades.

- Producto de matrices.

- Algoritmo.

- Propiedades.

- Ejercicios.

- Revisando la actividad inicial.

- Potencias de una matriz.

- Uso de la calculadora para calcular la potencia enésima de una matriz

- Matriz inversa.

- Concepto.

- Propiedades de las matrices inversas (siempre que existan).

- Cálculo de la matriz inversa.

- (A) Aplicando la definición y resolviendo el sistema resultante.

- (B) Método de Gauss-Jordan.

- (C) Mediante calculadora científica.

- (D) Mediante calculadora gráfica.

- Rango de una matriz.

- Cálculo del rango por el método de Gauss.

- Forma matricial de un sistema de ecuaciones.

- Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de la matriz inversa.

- PROBLEMAS PROPUESTOS

- Ecuaciones matriciales.

- PROBLEMAS PROPUESTOS

- **Aplicación de las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de situaciones que manejen datos estructurados en forma de tablas:**

- Repaso de los objetivos del tema.

- Suma y resta de matrices.

- Producto de un número por una matriz

- Incrementos compuestos.

- Producto de matrices.

- PROBLEMAS PROPUESTOS

- Otras aplicaciones: grafos en forma de matriz

- PROPUESTAS DE ACTIVIDADES INDAGATORIAS TIPO TEST.



INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES

Actividad inicial mediante resolución aritmética.

Una empresa tiene tres factorías, F_1 , F_2 , F_3 en las que se fabrican diariamente tres tipos diferentes de productos, A, B y C, como se indica a continuación:

Turno de mañana:

- F_1 : 200 unidades de A, 40 de B y 30 de C.
- F_2 : 20 unidades de A, 100 de B y 200 de C.
- F_3 : 80 unidades de A, 50 de B y 40 de C.

Turno de tarde:

- F_1 : 150 unidades de A, 30 de B y 30 de C.
- F_2 : 10 unidades de A, 80 de B y 100 de C.
- F_3 : 60 unidades de A, 30 de B y 30 de C.

Cada unidad de A que se vende proporciona un beneficio de 5 euros; por cada unidad de B, se obtienen 20 euros de beneficio; y por cada una de C, 30 euros.

Sabiendo que la empresa vende toda la producción diaria, obtén el beneficio diario obtenido con cada una de las tres factorías.

Calculamos los beneficios obtenidos con las unidades A, B y C en cada factoría

Lo más habitual es que el alumno calcule las unidades diarias producidas de cada producto por factoría:

$$A_{Factoria1} = \underbrace{200}_{mañana} + \underbrace{150}_{tarde} = 350$$

$$A_{Factoria2} = \underbrace{20}_{mañana} + \underbrace{10}_{tarde} = 30$$

$$A_{Factoria3} = \underbrace{80}_{mañana} + \underbrace{60}_{tarde} = 140$$

$$B_{Factoria1} = \underbrace{40}_{mañana} + \underbrace{30}_{tarde} = 70$$

$$B_{Factoria2} = \underbrace{100}_{mañana} + \underbrace{80}_{tarde} = 180$$

$$B_{Factoria3} = \underbrace{50}_{mañana} + \underbrace{30}_{tarde} = 80$$

$$C_{Factoria1} = \underbrace{30}_{mañana} + \underbrace{30}_{tarde} = 60$$

$$C_{Factoria2} = \underbrace{200}_{mañana} + \underbrace{100}_{tarde} = 300$$

$$C_{Factoria3} = \underbrace{40}_{mañana} + \underbrace{30}_{tarde} = 70$$

Para posteriormente calcular el beneficio diario para cada factoría:

$$Beneficio_{factoria1} = \underbrace{350 \cdot 5}_{beneficio\ por\ A} + \underbrace{70 \cdot 20}_{beneficio\ por\ B} + \underbrace{60 \cdot 30}_{beneficio\ por\ C} = 1750 + 1400 + 1800 = 4950$$

$$Beneficio_{factoria2} = \underbrace{30 \cdot 5}_{beneficio\ por\ A} + \underbrace{180 \cdot 20}_{beneficio\ por\ B} + \underbrace{300 \cdot 30}_{beneficio\ por\ C} = 150 + 3600 + 9000 = 12750$$

$$Beneficio_{factoria3} = \underbrace{140 \cdot 5}_{beneficio\ por\ A} + \underbrace{80 \cdot 20}_{beneficio\ por\ B} + \underbrace{70 \cdot 30}_{beneficio\ por\ C} = 700 + 1600 + 2100 = 4400$$

El beneficio total diario es:

$$Beneficio\ Total = \underbrace{4950}_{Beneficio\ factoria1} + \underbrace{12750}_{Beneficio\ factoria2} + \underbrace{4400}_{Beneficio\ factoria3} = 22100$$





REPRESENTACIONES TABULARES

La siguiente tabla aparece de una forma muy habitual en muchos deportes, en nuestra vida cotidiana. Se trata de una representación sencilla, cómoda, entendible y muy manejable.

Real Madrid de baloncesto. Temporada 2005/2006

Jugador	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Bullock	31	29	21	17	2	5.2	39	3.4	7	48	4.2	4.9	86	0.7	2.5	3.2	3.3	1.6	1.9	0.1	0.4	0	2.6	5
Gelabale	34	24	23	8.1	0.5	1.4	36	2.5	4.1	62	1.5	2	78	1.4	2.1	3.5	1.1	0.5	1.1	0.7	0.2	0.8	3.1	1.9
Sonko	32	24	21	7.8	1	2.5	39	1.6	3	53	1.8	2.4	74	0.5	1.8	2.3	2.7	1	1.5	0.3	0.4	0.1	2.7	2.5
Reyes	31	22	24	9.1	0	0		3.5	6.6	54	2	4	49	2.5	3.7	6.2	0.6	1.2	1.5	0.5	0.5	0.3	3.5	4.2
Herreros	29	21	9	8.9	1.9	4.1	47	1	2.2	45	1.1	1.4	74	0.7	1.2	1.9	1.1	0.6	0.9	0.2	0.2	0	1.9	1.9
Burke	31	19	21	7.6	0.1	0.2	60	3.2	6.2	51	0.9	1.4	67	1.4	3	4.4	0.5	0.5	1.1	0.7	0.3	0.9	2.1	1.4
Bennett	21	28	20	9.3	1.7	4.6	38	1.3	2.6	51	1.5	2	76	0.4	1.8	2.2	3.7	1.4	1.6	0	0.1	0	2.6	2.4
Fotsis	29	19	11	8.1	0.9	2.3	41	2	3.5	58	1.2	1.6	78	1.4	2.4	3.8	0.7	0.7	1.1	0.8	0.1	0.5	2.2	1.2
Hervelle	27	18	6	6	0.4	2	20	1.6	3.3	50	1.6	2.4	64	2.2	2.9	5.1	0.4	1.1	1	0.4	0.1	0.3	3.4	2.2
Bueno	29	12	6	5.8	0	0	-	2.3	4.7	49	1.3	1.4	88	1	1.2	2.2	0.2	0.3	0.8	0.6	0.1	0.2	1.7	1.4
Stojic	26	10	5	2.4	0.4	1.7	23	0.5	0.9	58	0.2	0.3	56	0.2	0.7	0.9	0.3	0.3	0.5	0	0	0.1	1.3	0.4
Hamilton	5	24	2	9.6	1.2	3.4	35	2.6	4.4	59	0.8	1	80	0.4	1	1.4	1.8	2.2	2.8	0.4	0	0.2	2.8	1.8
Bell	2	22	1	3	0	3.5	0	1.5	6	25	0	1	0	0	1	1	1.5	1	2.5	1	1	0	4	1.5
Larrañaga	1	12	0	14	4	6	67	1	2	50	0	0		0	0	0	0	1	0	0	0	0	3	0
Antelo	3	3	0	0	0	0.3	0	0	0.3	0	0	0		0.3	0.7	1	0	0	0	0	0.3	0	0.3	0
Muñoz	1	3	0	0	0	1	0	0	0		0	0		0	0	0	1	0	3	0	0	0	1	0
Aspe	1	1	0	0	0	0	-	0	1	0	0	0		0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
Equipo	34													1.2	1.6	2.9		0.4	0.7					0.3
Totales		200		80	7.7	20.7	37	20.8	39.9	52	15.1	21	72	12.1	22.1	34.3	12.6	8.8	12.5	4.1	2.3	2.8	24.2	21.9

- (1) Partidos jugados (2) Minutos jugados (3) Número de veces en el 5 inicial (4) Puntos totales (5) Tiros de 3 convertidos (6) Tiros de 3 intentados (7) % Tiros de 3 convertidos (8) Tiros de 2 convertidos (9) Tiros de 2 intentados (10) % Tiros de 2 convertidos (11) Tiros libres convertidos (12) Tiros libres intentados (13) % Tiros libres convertidos (14) Rebotes ofensivos (15) Rebotes defensivos (16) total de rebotes (17) Asistencias (18) balones recuperados (19) Balones perdidos (20) Tapones a favor (21) Tapones en contra (22) Mates (23) Faltas cometidas (24) Faltas recibidas

James J. Sylvester (1814-1897) sugiere, a partir de este tipo de formas de representar informaciones, la idea de **matrices** como uno de los instrumentos básicos y de especial importancia en el Álgebra Lineal, denominación que nace de la idea de dar a entender que se trata de las "**madres**" de los determinantes.

CONCEPTO DE MATRIZ

Es un conjunto de números, llamados escalares, dispuestos en filas y columnas, de forma que todas las filas tengan el mismo número de elementos y todas las columnas también.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -7 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Se acostumbra a encerrar entre paréntesis, aunque las calculadoras gráficas, dependiendo de la marca y modelo, pueden hacerlo de otras formas; por ejemplo:

Gama CFX 9850G	ClassPad 300	Gama FX 9860G
-----------------------	---------------------	----------------------

TERMINOLOGÍA

Elemento o entrada: Es cada uno de los números de que consta la matriz.

Fila: Es cada una de las líneas horizontales que constituyen la matriz.

Columna: Es cada una de las líneas verticales que constituye la matriz.

Dimensión: Si una matriz tiene "**m**" filas y "**n**" columnas se dice que tiene por dimensión $m \times n$ o n por m .

Cada elemento se simboliza por a_{ij} donde "*i*" indica la fila y "*j*" la columna; Así a_{23} es el elemento de la segunda fila y la tercera columna.

El conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$ se representa por $M_{m \times n}$.

001 Escribe una matriz A de dimensión 2x3 y señala cuál es el elemento a_{13}

BH2

Vamos a ver cómo se hace con la gama fx 9860G SD

CREACIÓN DE MATRICES DESDE LA APLICACIÓN PRINCIPAL

MENU	MAIN MENU RUN/MAT/STAT/EDIT/SS/ST GRAPH/DYNA/TABLE/RECUR CONICS/EQUA/PRGM/TVM 3x3=0 FF	EXE		MAT F1	Matrix Mat A :None Mat B :None Mat C :None Mat D :None Mat E :None Mat F :None DEL DELA DIT
2 EXE 3	Mat A Dimension m×n m :2 n :3 Mat F :None DEL DELA DIT	EXE EXE	A 1 2 3 [0 0 0] 2 [0 0 0] R-OP ROW COL EDIT	Datos EXE	A 1 2 3 [0 0 0] 2 [0 0 0] R-OP ROW COL EDIT -2
EXIT EXIT		OPTN MAT F2		MAT F1	Mat Mat MxL Det Trn AuS
A-LOCK ALPHA	Mat A [0 0 0] [0 0 0]	A x,θ,T	Mat A [0 0 0] [0 0 0] Mat MxL Det Trn AuS	EXE	Ans 1 2 3 [0 0 0] 2 [0 0 0] R-OP ROW COL EDIT -2

Hemos colocado en negrita el elemento $a_{23} = -2$

002 Escribe una matriz C de dimensión 3x1 y señala cuál es el elemento c_{32}

BH2

REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA DE UNA MATRIZ

En la representación algebraica de una matriz, todos sus elementos se simbolizan por una misma letra, afectada por los dos subíndices que antes mencionábamos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo de una matriz de dimensión 3 x 3:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

IGUALDAD DE MATRICES

Se dice que dos matrices A y B son **iguales** si y solo si tienen la misma dimensión y sus elementos correspondientes (ocupan el mismo lugar) son iguales.

$$A, B \in M_{m \times n}, A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, m; \forall j = 1, 2, 3, \dots, n$$

003

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 5 & 0 \\ 5 & 0 & c \\ b & 3 & 1 \end{pmatrix}$

¿Qué valores han de tener "a", "b" y "c" para que las dos matrices anteriores sean iguales?

BH2

RESOLUCIÓN:

Aplicando la definición de igualdad de matrices, éstas serán iguales cuando se verifique que

$$a = 2, b = 4 \text{ y } c = 7.$$



004	Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3x - y + z & 5 & 0 \\ -2y + 2z & 0 & 7 \\ x - 2y - z & 3 & 1 \end{pmatrix}$	BH2
¿Qué valores han de tener "x", "y", "z" para que las dos matrices sean iguales?		

RESOLUCIÓN:

Si nuestro objetivo es simplemente razonar qué tiene que ocurrir para que esas 2 matrices sean iguales, sin importarnos el procedimiento, podemos utilizar directamente la calculadora:

	Equation Select Type F1: Simultaneous F2: Polynomial F3: Solver SIML POLY SOLV	$a_nX + b_nY + c_nZ = d_n$ <table border="1"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>-1</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>-2</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>-2</td><td>-1</td><td>1</td></tr> </table> SOLV DEL CLR EDIT	1	3	-1	1	3	2	0	-2	2	7	3	1	-2	-1	1	$a_nX + b_nY + c_nZ = d_n$ <table border="1"> <tr><td>X</td><td>0.6667</td></tr> <tr><td>Y</td><td>-0.7778</td></tr> <tr><td>Z</td><td>0.2222</td></tr> </table> REPT 2.3	X	0.6667	Y	-0.7778	Z	0.2222
1	3	-1	1	3																				
2	0	-2	2	7																				
3	1	-2	-1	1																				
X	0.6667																							
Y	-0.7778																							
Z	0.2222																							

Para que ambas matrices sean iguales ha de verificarse que

$$x = 2/3 \quad ; \quad y = -7/9 \quad ; \quad z = 2/9$$

INTRODUCCIÓN DE LOS ELEMENTOS DE UNA MATRIZ EN UNA CALCULADORA CIENTÍFICA

La gama FX - 570MS de CASIO que aparece en España a principios de 2002 nos permite trabajar de una manera rápida y eficaz con la matrices de un máximo de 3 filas y 3 columnas.

Antes de empezar cualquier cálculo debemos de crear las matrices con las que vamos a trabajar. Introduzcamos, por ejemplo, la matriz B con los siguientes elementos:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Presionando la tecla MODE repetidas veces vamos buscando el área de trabajo de las matrices

MODE MODE MODE

2

EQN	MAT	VCT
1	2	3

MAT	D
0.	

Ahora ya podemos trabajar con las matrices, apareciendo MAT en la parte superior de la pantalla; buscamos nuevas opciones:

SHIFT MAT
4

Dim	Edit	Mat →
1	2	3

Señalamos las dimensiones de la matriz B que queremos introducir (2x3):

1

A	B	C
1	2	3

Ingresaremos la matriz en B

2

MAT	D
MatB (mxn)	m?
0.	

Me pregunta por el número de filas; respuesta: 2 filas

2 =

MAT	D
MatB (mxn)	n?
0.	

Me pregunta por el número de columnas; respuesta: 3 columnas

3 =

MAT D
MatB 11 →
0.

A continuación iremos introduciendo los diferentes elementos de la matriz B:

$b_{11} = 1$

1 =

MAT D
MatB 12 →
0.

$b_{12} = -2$

- 2 =

MAT D
MatB 13 →
0.

$b_{13} = 3 ; b_{21} = 4 ; b_{22} = 5 ; b_{23} = 6$

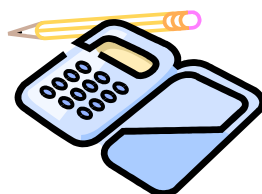
3 = 4 = 5 = 6 =

MAT D
MatB 11 →
1.

Una vez introducidos todos los elementos podemos movernos por la matriz con los cursores     o con el  para modificar cualquier error.

De esta misma forma podríamos introducir la matriz A o la matriz C, es decir, sólo podremos trabajar con 4 matrices:

La matriz A, la matriz B, la matriz C y la matriz **Ans** (matriz respuesta).

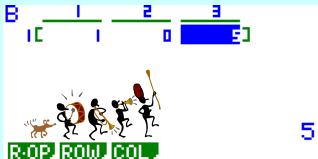


TIPOS DE MATRICES

005	A la vista de las definiciones escribe diferentes matrices que sirvan de ejemplo para ilustrarlas: Matriz fila, matriz columna, matriz rectangular, matriz cuadrada (diagonal principal y diagonal secundaria), matriz triangular superior, matriz triangular inferior, matriz triangular, matriz diagonal, matriz escalar, matriz unidad, matriz nula, matriz traspuesta (propiedades), matriz simétrica, matriz opuesta, matriz anti-simétrica.	BH2
-----	---	-----

NOTA: A través de este ejercicio se reflexiona sobre las definiciones y se hace un repaso de los conceptos vistos hasta ahora (utilizaremos la gama de calculadoras CFX 9850G).

Desde el punto de vista de su dimensión podemos hablar de:

Matriz fila: es la matriz que tiene una sola fila y varias columnas Ejemplo →	
Matriz columna: es la matriz que tiene sólo una columna y varias filas. Ejemplo →	



Matriz rectangular: es aquella matriz en la que el número de filas es distinto del número de columnas.

Ejemplo →

Cuadrada: es aquella matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas.

Serían de dimensión $n \times n$, pero en este caso se suele utilizar el vocablo "de orden"; así ésta sería una matriz *de orden n*.

El conjunto de todas la matrices de orden n se representa por M_n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal principal de una matriz cuadrada, es el conjunto de elementos de la forma a_{ii} , $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$; es decir, los elementos $a_{11} \ a_{22} \ a_{33} \dots a_{nn}$

Diagonal secundaria de una matriz cuadrada: es el conjunto de elementos de la forma $a_{i,n-i+1}$, $\forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ es decir, los elementos $a_{13} \ a_{22} \ a_{31}$

CURIOSIDAD: en la diagonal secundaria, la suma de subíndices de fila y columna es una unidad superior al orden de la matriz.

Dentro de las matrices cuadradas distinguiremos varios tipos atendiendo a propiedades particulares de sus elementos:

Matriz triangular superior: es una matriz **cuadrada** en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son 0.

Matriz triangular inferior: es una matriz cuadrada en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son 0.

Ejemplo →

Matriz triangular: es toda matriz cuadrada que es triangular superior o inferior.

Ejemplo →

Matriz diagonal: es toda matriz cuyos elementos no diagonales son nulos. (es triangular superior e inferior simultáneamente).

Ejemplo →

Matriz escalar: es una matriz *diagonal* en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo →

Matriz unidad (I): es una matriz **escalar** en la que todos los elementos NO nulos son iguales a 1. Se representa por I_n o simplemente por **I** si el orden es conocido

Ejemplo →



Matriz nula: es aquella en la que todos los elementos que la constituyen son 0. Se representa por O_n o simplemente por O si el orden es conocido.

Ejemplo: matriz nula de orden 2 $\rightarrow O_2$

El concepto de matriz nula o cero extiende a matrices rectangulares. Así $O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matriz traspuesta: se llama traspuesta de una matriz A de dimensiones $m \times n$ a otra matriz A^t de dimensiones $n \times m$, que se obtiene a partir de la primera, intercambiando ordenadamente filas por columnas.

Hagamos la traspuesta de $E \rightarrow E^t$

Propiedades de la transposición de matrices:

$$(A^t)^t = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

$$(k \cdot A)^t = k \cdot A^t, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

Matriz simétrica: Una matriz es simétrica cuando es igual a su traspuesta.

Ejemplo $\rightarrow$

Matriz opuesta: Dada una matriz A se dice que la matriz $-A$ es su opuesta si todos sus elementos tienen el signo opuesto: Diseñemos la opuesta de la matriz $S \rightarrow (-S)$

Matriz antisimétrica o hemisimétrica: es toda matriz cuadrada que coincide con la opuesta de su traspuesta, $A = -A^t$; es decir, la que tiene opuestos los elementos simétricos respecto de la diagonal principal y nulos los elementos de ésta.

NOTA: LA CALCULADORA GRÁFICA tiene la opción de obtener la traspuesta de una matriz determinada y la matriz unidad de un determinado orden; para ello trabajamos en el modo **RUN**, que es donde efectuamos las operaciones con matrices, así como otras funciones:

Hagamos la traspuesta de $E \rightarrow E^t$

MENU 1 OPTN MAT F2 Trn F4 Mat F1 ALPHA cos EXE

Trn Mat E

Ans 1 2

1 1 -2

2 3 5

3 -1 0

Mat M+L Det Trn A↔ 1

■ **ident:** se puede escribir directamente una matriz identidad.

• Sintaxis: **ident** (número natural)

OPTN MAT F2

Ident

3

EXE

Ans 1 2 3

1 1 0 0

2 0 1 0

3 0 0 1

Mat M+L Det Trn A↔ 1





OPERACIONES CON MATRICES

En el conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$, $M_{m \times n}$, vamos a estudiar las siguientes operaciones (y sus propiedades):

SUMA DE DOS MATRICES

La suma de varias matrices de la misma dimensión es otra matriz cuyos elementos se obtienen sumando los que ocupan el mismo lugar en cada una de las matrices sumadas.

Sean A y B dos matrices de dimensión $m \times n$, se define la **suma de A y B** como otra matriz de igual dimensión cuyos elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes de las matrices A y B . Es decir:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, m; \forall j = 1, 2, 3, \dots, n; A, B, C \in M_{m \times n}$$

006	Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & -8 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ Efectúa $A + B$	BH2
-----	---	-----

RESOLUCIÓN:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+3 & -5+(-3) & 0+2 \\ 3+(-2) & 6+1 & -8+9 \\ 5+3 & 6+6 & 1+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \\ 8 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Con la gama de calculadoras CFX 9850G

Introducimos las matrices A y B en la calculadora en el modo MAT . Para proceder a sumarlas: 	Mat. $A+Mat. B$ 	Ans.
---	---------------------	----------

Propiedades de la suma de matrices: El conjunto de matrices de dimensión $m \times n$ con la operación suma tiene estructura de **grupo abeliano** al cumplir la siguientes propiedades:

Propiedad asociativa:

$$(A + B) + C = A + (B + C), \forall A, B, C \in M_{m \times n}$$

Existencia de elemento neutro:

$$\exists O \in M_{m \times n} / \forall A \in M_{m \times n}, O + A = A + O = A$$

Existencia de elemento simétrico:

$$\exists (-A) \in M_{m \times n} / \forall A \in M_{m \times n}, A + (-A) = (-A) + A = O$$

Propiedad conmutativa:

$$A + B = B + A, \forall A, B \in M_{m \times n}$$

La suma de matrices se comporta de una manera similar a la suma de números.

DIFERENCIA DE DOS MATRICES

Sean dos matrices A y B de igual dimensión, la diferencia de A y B , expresado como $A - B$ es la matriz que resulta de sumar A con la matriz opuesta de B :

$$A - B = A + (-B)$$

007	Efectúa $A - B$, siendo A y B las matrices del ejercicio anterior	BH2
-----	--	-----

RESOLUCIÓN:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-3 & -5-(-3) & 0-2 \\ 3-(-2) & 6-1 & -8-9 \\ 5-3 & 6-6 & 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & -17 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Con la gama de calculadoras CFX 9850G

Las matrices A y B ya las tenemos [EXIT] [←] [←] [←] [DEL] [-] [EXE]	Mat A-Mat B [Mat] [M+L] [Det] [Trn] [Ans] [↵]	Ans 1 2 3 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ -1 [Mat] [M+L] [Det] [Trn] [Ans] [↵]
---	--	--

SUMA ALGEBRAICA DE MATRICES

La suma algebraica de varias matrices de la misma dimensión es otra matriz que resulta de sumar algebraicamente los elementos que ocupan el mismo lugar en cada una de las matrices sumandos.

008	Sean las siguientes matrices, efectúa $A - B - C + D$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	BH2
-----	--	-----

 **RESOLUCIÓN:**

$$A - B - C + D = \begin{pmatrix} 2-9-0+4 & -1-2-2+(-1) \\ 3-(-2)-(-1)+3 & 4-5-3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 9 & -2 \end{pmatrix}$$

 **RESOLUCIÓN:**

Introducimos las matrices A, B, C y D en la calculadora en el modo MAT y efectuamos las operaciones:	Mat A-Mat B-Mat C+Mat D [Mat] [M+L] [Det] [Trn] [Ans] [↵]	Ans 1 2 $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$ -3 [Mat] [M+L] [Det] [Trn] [Ans] [↵]
---	--	--

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ.

Sea k un número real (escalar) y A una matriz de dimensión $m \times n$, se define el **producto de ese número k por la matriz A** , y lo denotaremos por $k \cdot A$, a otra matriz de dimensión $m \times n$ cuyos elementos se obtienen multiplicando por k el elemento correspondiente de la matriz A . Es decir:

$$B = k \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij}, \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, m; \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots, n; \quad A, B \in M_{m \times n}, \quad k \in \mathbb{R}$$

009	Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, efectúa $5 \cdot A$	BH2
-----	---	-----

 **RESOLUCIÓN:**

$$5 \cdot A = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \end{pmatrix} \rightarrow 5 \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$$

 **RESOLUCIÓN:**

5Mat A [Mat] [M+L] [Det] [Trn] [Ans] [↵]	Ans 1 2 $\begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$ 10 [Mat] [M+L] [Det] [Trn] [Ans] [↵]
---	---

Propiedades del producto de un escalar por una matriz:

Propiedad distributiva del producto respecto a la suma de matrices:

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B, \quad \forall A, B \in M_{m \times n}, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Propiedad distributiva del producto respecto de la suma de escalares:

$$(k + k') \cdot A = k \cdot A + k' \cdot A, \quad \forall A \in M_{m \times n}, \quad \forall k, k' \in \mathbb{R}$$

Asociatividad mixta:

$$k \cdot (k' \cdot A) = (k \cdot k') \cdot A, \quad \forall A \in M_{m \times n}, \quad \forall k, k' \in \mathbb{R}$$

Neutro de operadores:

$$1 \cdot A = A, \quad \forall A \in M_{m \times n}$$



Al cumplir el producto de un escalar por una matriz las anteriores propiedades el conjunto de matrices de dimensión $m \times n$ con las operaciones suma y producto por un escalar tiene estructura de **espacio vectorial**.



Las matrices escalares pueden ser escritas en la forma $k \cdot I$

PRODUCTO DE MATRICES.

Algoritmo.

Sea A una matriz de dimensión $m \times n$ y B una matriz de dimensión $n \times p$ se define el **producto de A y B** como otra matriz C de dimensión $m \times p$ cuyos elementos se obtienen:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, m; \forall j = 1, 2, 3, \dots, p$$

A la vista del ejemplo se puede decir que el producto de matrices de dimensión $m \times n$, no es una ley de composición interna salvo que m y n coincidan (las matrices sean cuadradas); el producto de matrices es, en general, **no conmutativo** incluso aunque las matrices sean cuadradas:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Dos matrices cuadradas A y B se dice que **conmutan** si $A \cdot B = B \cdot A$

010	Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ Efectúa (a) $A \cdot B$ (b) $B \cdot A$	BH2
-----	--	-----



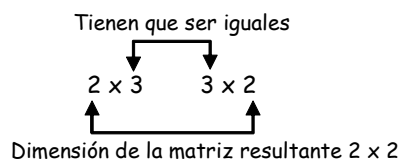
RESOLUCIÓN apartado a:

Antes de empezar a hacer un PRODUCTO de matrices debemos de hacer una comprobación rutinaria:

(a) Sean 2 matrices A y B , para que se pueda efectuar el producto $A \cdot B$ es condición necesaria que el número de columnas de la matriz A sea igual al número de filas de la matriz B .

(b) El producto, por la izquierda, de una matriz de dimensión $m \times n$ por otra matriz de dimensión $n \times p$ es una matriz de dimensión $m \times p$.

(c) La multiplicación de matrices no posee la propiedad conmutativa.



$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Dimensión de A : 2×3

Dimensión de B : 3×2

Dimensión de $A \times B$: 2×2

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 + 18 - 3 & 8 - 6 \\ 28 + 45 - 6 & 32 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 2 \\ 67 & 20 \end{pmatrix}$$

 RESOLUCIÓN apartado b:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 7+32 & 14+40 & 21+48 \\ 9+0 & 18+0 & 27+0 \\ -1-8 & -2-10 & -3-12 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 39 & 54 & 69 \\ 9 & 18 & 27 \\ -9 & -12 & -15 \end{pmatrix}$$

 RESOLUCIÓN:

Mat A×Mat B	Ans: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 20 \end{bmatrix}$	Mat B×Mat A	Ans: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 18 & 27 \\ 3 & -9 & -15 \end{bmatrix}$
Mat M+L Det Trn RUG	Mat M+L Det Trn RUG	Mat M+L Det Trn RUG	Mat M+L Det Trn RUG

Propiedades del producto de matrices:

Propiedad asociativa:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

Existencia de elemento neutro:

$$\exists I_m, I_n \in \mathcal{M}_{m \times n} / \forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}, I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$$

Propiedad distributiva del producto respecto a la suma de matrices:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}$$

No posee la propiedad conmutativa:

$$\exists A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}, A \cdot B \neq B \cdot A$$

El conjunto de matrices de dimensión $m \times n$ con las operaciones suma y producto tiene estructura de **anillo no conmutativo**.

El producto de matrices se comporta de manera diferente al producto de números y debemos resaltar los siguientes aspectos:

- (1) El producto de dos matrices no nulas puede ser la matriz nula:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Con números si $a \cdot b = 0$ entonces o bien $a = 0$ o bien $b = 0$ pero con matrices si $A \cdot B = O$ no se deduce que $A = O$ o $B = O$.

- (2) La matriz unidad no es la única que multiplicada por otra matriz tiene como resultado esa segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Con números si $a \cdot b = b$ entonces $a = 1$ pero con matrices si $A \cdot B = B$ no se deduce que $A = I$.

- (3) La ley de cancelación tampoco funciona de igual manera.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Con números si $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0$ entonces $b = c$, pero con matrices si $A \cdot B = A \cdot C$ no se deduce que $B = C$.





011	Sean las siguientes matrices, (a) Efectúa $A \cdot B$ (b) Efectúa $B \cdot A$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	BH2
-----	---	-----

RESOLUCIÓN apartado a:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} =$$

Dimensión de A: 2×3 Dimensión de B: 3×2

Dimensión de $A \times B$: 2×2

$$\begin{pmatrix} -3+0+0 & 1-3+0 \\ 15+0+4 & -5+9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 19 & 8 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN apartado b:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

Dimensión de B: 3×2 Dimensión de A: 2×3

Dimensión de $B \times A$: 3×3

$$\begin{pmatrix} -3-5 & 3+3 & 0-2 \\ 0-15 & 0+9 & 0-6 \\ -2+10 & 2-6 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 6 & -2 \\ -15 & 9 & -6 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Mat A×Mat B	Ans 1 2 1 -3 2 19 8	Mat B×Mat A	Ans 1 2 3 1 -8 6 -2 2 -15 9 -6 3 8 -4 4
-------------	---------------------------	-------------	--

012	Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ a) Efectúa $A \cdot B$ b) Efectúa $B \cdot A$	BH2
-----	--	-----

RESOLUCIÓN apartado a:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dimensión de A: 3×3 Dimensión de B: 2×3

Dimensión de $A \times B$: ¿?

No se puede efectuar el producto ya que el número de columnas de la matriz A es distinta del número de filas de la matriz B.

RESOLUCIÓN apartado b:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} =$$

Dimensión de B: 2×3 Dimensión de A: 3×3

Dimensión de $B \times A$: 2×3

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 12 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

 RESOLUCIÓN:

Mat A×Mat B	Mat A×Mat B Dimension ERROR Press:[EXIT]	Mat B×Mat A	Ans 1 2 3 1 [1 2 3] 2 [12 9 -2]
Mat M+L Det Trn Ans	Mat M+L Det Trn Ans	Mat M+L Det Trn Ans	1

013	Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ a) Efectúa $A \cdot B$ b) Efectúa $B \cdot A$	BH2
-----	---	-----

 RESOLUCIÓN apartado a:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dimensión de A : 4 x 1 Dimensión de B : 1 x 3

Dimensión de A x B : 4 x 3

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) & (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 \end{pmatrix}$	$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	Ans 1 2 3 1 [-1 1 -2] 2 [1 -1 2] 3 [2 -2 4] 4 [1 -1 2]
		Mat M+L Det Trn Ans

 RESOLUCIÓN apartado b:

Dimensión de B : 1 x 3 Dimensión de A : 4 x 1

No se puede efectuar el producto $B \cdot A$ ya que el número de columnas de la matriz B es distinto al número de filas de la matriz A.

NOTA: Este tipo de ejercicios son interesantes cuando tenemos como objetivo comprobar si el alumnado conoce el algoritmo del producto de matrices y tienen como herramienta una calculadora científica, ya que ésta no es capaz de trabajar con matrices de orden superior a tres.

014	Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, efectúa: $3 \cdot A \cdot A^T - 2 \cdot I$, Siendo I la matriz unidad.	BH2
-----	--	-----

 RESOLUCIÓN:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27+3 & 45+6 \\ 45+6 & 75+12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 51 \\ 51 & 87 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

 RESOLUCIÓN:

A 1 2 1 [3 1] 2 [5 2]	Efectuamos las operaciones indicadas:	3Mat A×Trn Mat A-2Ide ntity 2	Ans 1 2 1 [28 51] 2 [51 85]
R-OP ROW COL EDIT		Iden Dim Fill	28

015	Efectúa (a) $A \cdot B$ (b) $A + B$ (c) $A \cdot B^T$ (d) $2A - 3B$, dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	BH2
-----	--	-----

 RESOLUCIÓN apartado a:

$$A \cdot B =$$

Dimensión A (2x4) Dimensión B (2x4)



No se puede efectuar el producto $A \cdot B$ ya que el número de columnas de la matriz A es distinto al número de filas de la matriz B .

RESOLUCIÓN apartado b:

$$A+B =$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 10 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN apartado c:

$$A \cdot B^t =$$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

Dimensión A (2x4) Dimensión B^t (4x2)

Dimensión $A \cdot B^t$ (2x2)

$$= \begin{pmatrix} 3-6+25+2 & 1+3+0-1 \\ 0-6+5-2 & 0+3+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN apartado d:

$$2 \cdot A - 3 \cdot B =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -6 & 15 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -5 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

A·B Mat. A×Mat. B Mat. MxL Det. Trn AUS Ans 1 2 3 4 2 1 4 10 1 -2 Dimension ERROR Press:[EXIT]	A+B Mat. A+Mat. B Mat. MxL Det. Trn AUS Ans 1 2 3 4 2 1 4 10 1 -2 4	A·B^t Mat. A×Trn Mat. B Mat. MxL Det. Trn AUS Ans 1 2 3 2 24 3 24	2A - 3B 2Mat. A-3Mat. B Mat. MxL Det. Trn AUS Ans 1 2 3 4 2 -7 12 -5 -4 -7
---	---	---	--

REVISANDO LA ACTIVIDAD INICIAL

Actividad inicial mediante resolución matricial.

Una empresa tiene tres factorías, F_1 , F_2 , F_3 en las que se fabrican diariamente tres tipos diferentes de productos, A, B y C, como se indica a continuación:

Turno de mañana:

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 200 & 40 & 30 \\ 20 & 100 & 200 \\ 80 & 50 & 40 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Turno de tarde:

$$T = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 150 & 30 & 30 \\ 10 & 80 & 100 \\ 60 & 30 & 30 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Cada unidad de A que se vende proporciona un beneficio de 5 euros; por cada unidad de B, se obtienen 20 euros de beneficio; y por cada una de C, 30 euros.

Sabiendo que la empresa vende toda la producción diaria, obtén el beneficio diario obtenido con cada una de las tres factorías.

La resolución del problema adopta fácilmente forma de operación matricial; así la producción diaria de cada factoría por producto es la suma matricial:

$$D = M + T = \begin{pmatrix} 200 & 40 & 30 \\ 20 & 100 & 200 \\ 80 & 50 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 & 30 & 30 \\ 10 & 80 & 100 \\ 60 & 30 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 & 70 & 60 \\ 30 & 180 & 300 \\ 140 & 80 & 70 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 350 & 70 & 60 \\ 30 & 180 & 300 \\ 140 & 80 & 70 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

esto quiere decir que:

La factoría 1 produce 350 productos A, 70 productos B y 60 productos C diariamente. La factoría 2 produce 30 productos A, 180 productos B y 300 productos C diariamente. La factoría 3 produce 140 productos A, 80 productos B y 70 productos C diariamente.

El beneficio diario por factoría sale, naturalmente, al multiplicar la matriz de producción diaria por la matriz columna de beneficio por producto:

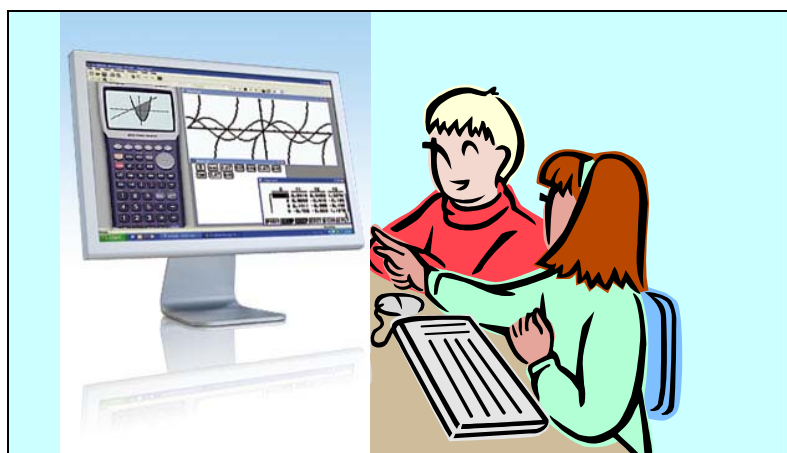
$$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Beneficio por unidad A} \\ \text{Beneficio por unidad B} \\ \text{Beneficio por unidad C} \end{matrix}$$

El beneficio diario por factoría es:

$$D \cdot B = \begin{pmatrix} 350 & 70 & 60 \\ 30 & 180 & 300 \\ 140 & 80 & 70 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \cdot 5 + 70 \cdot 20 + 60 \cdot 30 \\ 30 \cdot 5 + 180 \cdot 20 + 300 \cdot 30 \\ 140 \cdot 5 + 80 \cdot 20 + 70 \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4950 \\ 12750 \\ 4400 \end{pmatrix} \begin{matrix} BF_1 \\ BF_2 \\ BF_3 \end{matrix}$$

El beneficio total diario es:

$$\text{Beneficio Total} = \underbrace{4950}_{\text{Beneficio factoría 1}} + \underbrace{12750}_{\text{Beneficio factoría 2}} + \underbrace{4400}_{\text{Beneficio factoría 3}} = 22100$$



FX 9860G SD EN SU VERSIÓN PARA PC



POTENCIAS DE UNA MATRIZ

En el caso de matrices cuadradas podemos definir la potencia de matrices. Sea A una matriz cuadrada de orden n por definición $A^0 = I$ y $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ veces}}$ siendo k un número natural.



Las matrices que son iguales a sus potencias se llaman **idempotentes** y verifican que $A^2 = A$.

016

Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y también I la matriz identidad de orden 3×3

(a) Calcula la matriz J tal que $M = J + I$.

(b) Calcula las matrices J^2 , J^3 y J^{1994} .

BH2

RESOLUCIÓN apartado a:

$$M = J + I$$

$$M - I = J \rightarrow J = M - I$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN apartado b:

$$J^2 = J \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2 \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^4 = J^3 \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, a partir de aquí, todas las potencias de J serán la matriz nula, ya que proceden del producto de una matriz de grado $(n + 1)$ por la matriz nula de grado n .

$$J^{1994} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



RESOLUCIÓN:

J^2	J^3	J^{1994}

Uso de la calculadora para calcular la potencia enésima de una matriz

El hecho de que una ley de recurrencia o de formación se cumpla para unos casos, no justifica el que se cumpla para todos los casos.

Existe un método llamado de **INDUCCIÓN** que consiste en comprobar que si una ley de formación se cumple para 1, 2, 3 ó los 4 primeros casos; se supone que se cumple para un caso h y se demuestra

que a partir de ese caso h , se cumple para el $h + 1$. Es decir, demuestra que si se cumple para un caso, se cumple para el caso siguiente y como para los primeros se cumple, se cumple para todos.

017	Calcula la potencia enésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		BH2
Entramos en el modo MAT:			
Dimensión 3x3			
Introducimos los datos de las columnas y filas.		elevamos la matriz A al cuadrado	
Mat. A^2	$(Mat A)^2 = MatA \cdot MatA$ 		
Como Vemos, en este tipo de actividades la calculadora cobra una gran importancia: hace el trabajo "sucio y farragoso", dejándonos el tiempo para pensar y conjeturar:			
Mat. A^3	$(Mat A)^3 = (MatA)^2 \cdot MatA$ 		
Ya vamos viendo la ley de formación. Suponemos que se cumple para un orden $h = 100$			
Mat. A^{100}			
Si se cumple para $h = 100$, debe cumplirse para $h + 1 = 101$			
Mat. A^{101}			
$h+1 = Mat A \cdot (Mat A)^{100}$			
Si se cumple para $h = 100$ y se cumple también para $h+1 = 101$, "ya sería mala suerte haber acertado con los únicos valores h y $h+1$ que cumplen nuestra hipótesis". Así pues:		$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	

EJERCICIO PROPUESTO

018	Calcula la potencia n -ésima de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	BH2
-----	---	-----



LA MATRIZ INVERSA

Concepto.

Llamamos matriz inversa de una matriz cuadrada A y la denotamos por A^{-1} a una matriz que verifica que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Siendo I la matriz unidad.

Las matrices cuadradas no siempre tienen inversa. Esto permite clasificar las matrices cuadradas en dos grandes grupos: en **matrices regulares**, que son las que tienen inversa, y en **matrices singulares**, que son las que no tienen inversa.

Propiedades de las matrices inversas (siempre que existan):

(1) **Unicidad:** la matriz inversa de una matriz cuadrada, si existe, es única.

Demostración: Vamos suponer que existen dos matrices inversas a una matriz A dada y razonando vamos a comprobar que son iguales. Supongamos que B y C son dichas inversas:

$$C = C \cdot I = C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B = I \cdot B = B$$

$$(2) (A^{-1})^{-1} = A, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$$

$$(3) (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n$$

Teniendo en cuenta la propiedad $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}$

Demostración: basta con comprobar que $(A^t) \cdot (A^{-1})^t = I$ y que $(A^{-1})^t \cdot (A^t) = I$, en efecto:

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I$$

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = I^t = I$$

$$(4) (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n$$

Demostración: basta con comprobar que

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = I \quad \text{y que} \quad (B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I$$

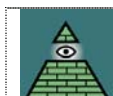
$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot [(B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1}] = A \cdot [I \cdot A^{-1}] = A \cdot A^{-1} = I$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot [(A^{-1} \cdot A) \cdot B] = B^{-1} \cdot [I \cdot B] = B^{-1} \cdot B = I$$



La inversa de la suma de dos matrices cuadradas no es la suma de las inversas:

$$(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$



Si A es regular (existe A^{-1}), las leyes de cancelación son válidas y por lo tanto si $A \cdot B = A \cdot C$ se deduce que $B = C$ o si $B \cdot A = C \cdot A$ se deduce que $B = C$.

Cálculo de la matriz inversa.**(A) Aplicando la definición y resolviendo el sistema resultante.**

019

Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

BH2

**RESOLUCIÓN APLICANDO LA DEFINICIÓN, CON LÁPIZ Y PAPEL:**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Aplicamos la definición:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1º Multiplicando el primer miembro

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x+3z & 2y+3t \\ 4x+5z & 4y+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2^\circ \text{ Multiplicando el segundo miembro} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x+4y & 3x+5y \\ 2z+4t & 3z+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la definición de igualdad de matrices en la 1ª expresión:

$$\begin{cases} 2x+3z=1 \\ 4x+5z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2) 2x+3z=1 \\ 4x+5z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x-6z=-2 \\ 4x+5z=0 \end{cases} \rightarrow \underline{-z=-2}$$

$$z = 2$$

$$2x + 3 \cdot 2 = 1 \rightarrow 2x = 1 - 6 \rightarrow$$

$$x = -5/2$$

$$\begin{cases} 2y+3t=0 \\ 4y+5t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2) 2y+3t=0 \\ 4y+5t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4y-6t=0 \\ 4y+5t=1 \end{cases} \rightarrow \underline{-t=1}$$

$$t = -1$$

$$2y + 3(-1) = 0 \rightarrow 2y = 3 \rightarrow$$

$$y = 3/2$$

Aplicando la definición de igualdad de matrices en la 2ª expresión:

$$\begin{cases} 2x+4y=1 \\ 3x+5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3) 2x+4y=1 \\ 2) 3x+5y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x-12y=-3 \\ 6x+10y=0 \end{cases} \rightarrow \underline{-2y=-3}$$

$$y = 3/2$$

$$2x + 4y = 1 \rightarrow 2x + 4 \cdot 3/2 = 1 \rightarrow 2x + 6 = 1 \rightarrow 2x = -5$$

$$x = -5/2$$

$$\begin{cases} 2z+4t=0 \\ 3z+5t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3) 2z+4t=0 \\ 2) 3z+5t=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6z-12t=0 \\ 6z+10t=2 \end{cases} \rightarrow \underline{-2t=2}$$

$$t = -1$$

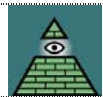
$$2z + 4(-1) = 0 \rightarrow 2z - 4 = 0 \rightarrow 2z = 4$$

$$z = 2$$

Por lo tanto la matriz inversa será:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

☞ Si nos sale alguna incoherencia, como pueda ser que el valor que toma alguna de las incógnitas sea diferente al despejar en la 1ª o en la 2ª, diremos que la matriz no tiene inversa.



Realmente no hace falta comprobar que $A^{-1} \cdot A = I$ porque si A es cuadrada y $A \cdot B = I$ se puede demostrar (aunque no lo haremos) que entonces se verifica que $B \cdot A = I$

☞ El problema se nos plantea cuando tratamos de resolver matrices de orden 3, en las que el número de ecuaciones que obtendremos va a ser muy grande; y no digamos si son de orden 4, 5,... por lo que un método más cómodo es el de **GAUSS - JORDAN**, y que es el que a continuación pasamos a exponer.

(B) Método de GAUSS-JORDAN.



La inversa de una matriz regular A se calcula transformando la matriz $(A | I)$ mediante operaciones elementales por filas en la matriz $(I | A^{-1})$.

$$(A | I) \xrightarrow{\text{op. elementales por filas}} (I | A^{-1})$$



020

Halla la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y explica el resultado obtenido

BH2

**RESOLUCIÓN:**

Vamos a calcular la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan; para ello colocamos la matriz A y la matriz ampliada resultante de añadirle la matriz unidad correspondiente; después de las transformaciones pertinentes, buscamos obtener en la parte izquierda la matriz unidad:

$$\begin{array}{l} (-1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (-2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & | & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \\ (1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (3) \\ 6) \\ 1) \end{array} \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2) \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & | & 4 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & | & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & | & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \\ -1) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & | & 9 & 0 & -9 \\ 0 & 6 & 0 & | & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & | & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Así pues, si multiplicamos las matrices $A \cdot A^{-1}$ o bien, las matrices $A^{-1} \cdot A$ obtendremos de ambas formas la matriz unidad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

(C) MEDIANTE CALCULADORA CIENTÍFICA.

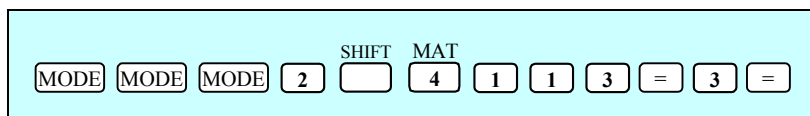
021

Efectúa el ejercicio anterior con calculadora científica y explica el resultado obtenido.

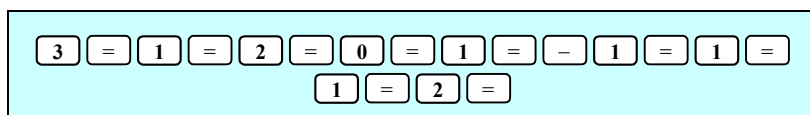
BH2

**RESOLUCIÓN:**

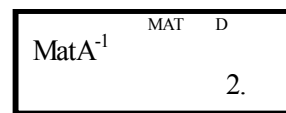
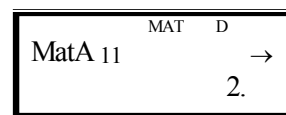
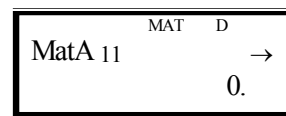
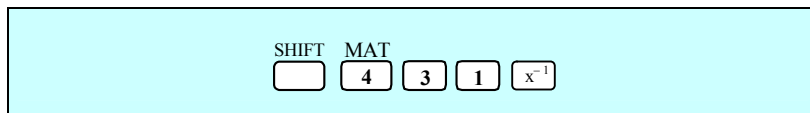
Introducimos los elementos de la matriz A, de orden 3, en la calculadora CIENTÍFICA según ya hemos visto:



Introducimos todos los elementos de la matriz A



Intentamos conseguir **Mat A⁻¹**



=

MAT D
MatAns 11
0.5

Según vayamos moviendo el cursor ► irán apareciendo los diferentes elementos

Ans₁₂ = 0 ; Ans₁₃ = - 1/2 ;
Ans₂₁ = - 1/6 ; Ans₂₂ = 2/3 ; Ans₂₃ = 1/2
Ans₃₁ = - 1/6 ; Ans₃₂ = - 1/3 ; Ans₃₃ = 1/2

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/6 & 2/3 & 1/2 \\ -1/6 & -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$



Si multiplicamos las matrices $A \cdot A^{-1}$ o bien, las matrices $A^{-1} \cdot A$ obtendremos de ambas formas la matriz unidad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

(D) MEDIANTE CALCULADORA GRÁFICA GAMA FX 9860G SD

022

Efectúa el ejercicio anterior con calculadora gráfica y explica el resultado obtenido.

BH2



RESOLUCIÓN:

Introducimos los elementos de la matriz A en la calculadora en el modo **MAT** y, a continuación, efectuamos las siguientes operaciones en el modo **RUN** para conseguir **Mat A⁻¹**

MAT Mat

OPTN F2 F1 ALPHA

A x,θ,T SHIFT)

Mat A⁻¹

Mat M+L Det Trn A₀₃ ▢

EXE

Ans 1 2 3

1 0.5 0 -0.5

2 -0.166 0.6666 0.5

3 -0.166 -0.333 0.5

1,2

Mat M+L Det Trn A₀₃ ▢

Comprobación: $A \cdot A^{-1}$

Mat A×Mat A⁻¹

Mat M+L Det Trn A₀₃ ▢

Ans 1 2 3

1 1 0 0

2 0 1 0

3 0 0 1

1

Mat M+L Det Trn A₀₃ ▢

Comprobación: $A^{-1} \cdot A$

Mat A⁻¹×Mat A

Mat M+L Det Trn A₀₃ ▢

Ans 1 2 3

1 1 0 0

2 0 1 0

3 0 0 1

1

Mat M+L Det Trn A₀₃ ▢

Así pues, si multiplicamos las matrices $A \cdot A^{-1}$ o bien, las matrices $A^{-1} \cdot A$ obtendremos de ambas formas la matriz unidad:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

023

Halla la matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ por métodos algebraicos y explica el resultado obtenido.

BH2



RESOLUCIÓN:

Vamos a calcular la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.



$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 12 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 5 & 10 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -24 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -12 & -24 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**RESOLUCIÓN:**

	EXIT EXIT	Mat A ⁻¹	EXE	
---	--	---------------------	------------------------------------	---

024

Halla la matriz inversa de $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ por métodos algebraicos y explica el resultado obtenido

**RESOLUCIÓN:**

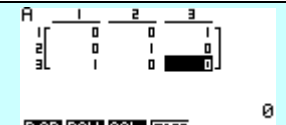
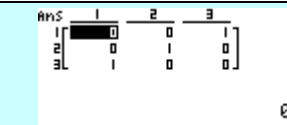
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Colocamos las filas de forma adecuada mediante:

 $F_1 \rightarrow F_3$ $F_2 \rightarrow F_2$ $F_3 \rightarrow F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**RESOLUCIÓN:**

	EXIT EXIT	Mat A ⁻¹	EXE	
---	--	---------------------	------------------------------------	---

Así pues, si multiplicamos las matrices $C \cdot C^{-1}$ o bien, las matrices $C^{-1} \cdot C$ obtendremos de ambas formas la matriz unidad: $C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = I$

025

Halla la matriz inversa de $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ por métodos algebraicos y explica el resultado obtenido

**RESOLUCIÓN:**

Vamos a calcular la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Solución: No será posible obtener todos unos (1) en la diagonal principal, así pues la matriz C no tiene inversa.



RESOLUCIÓN:

	EXIT EXIT	Mat A^-1 Mat: MxL Det: Trn: RUS	EXE	
--	--------------	------------------------------------	-----	--

Solución: No será posible obtener todos unos (1) en la diagonal principal, así pues la matriz B no tiene inversa.

026	Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Se pide realizar las siguientes operaciones con matrices: (a) Obtén: $C + A \cdot B$ (b) Calcula: $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ (c) $(C + A \cdot B)^{-1}$	BH2
-----	---	-----



RESOLUCIÓN apartado a:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$



RESOLUCIÓN apartado b:

$$C^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} (1) & \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (1) & \begin{pmatrix} -1 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1) & \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1) & \begin{pmatrix} 0 & -1 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & -1 & | & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & -1 \\ 0 & 1 & | & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} (-1) & \begin{pmatrix} -4 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (4) & \begin{pmatrix} -1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (3) & \begin{pmatrix} -4 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1) & \begin{pmatrix} 0 & 3 & | & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \begin{pmatrix} -12 & 0 & | & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{3} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & | & -1 & 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \rightarrow (A \cdot B)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$



$$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN apartado c:

$$C + AB = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C + AB)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} (-2) & (-3) & 0 & 1 & 0 \\ (3) & (-2) & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -3 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C + AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN:

Mat C+Mat A×Mat B	Mat C+1+(Mat A×Mat B) ⁻¹	(Mat C+Mat A×Mat B) ⁻¹
(a) Mat M+L Det Trn RUS	(b) Mat M+L Det Trn RUS	(c) Mat M+L Det Trn RUS
Ans 1 2 2 [-3 0 -2 1]	Ans 1 2 2 [-0.333 -0.666 -1.333 0.3333]	Ans 1 2 2 [-0.333 0 -0.666 1]
(a) -3	(b) -1.3	(c) -1.3

027	Dadas las siguientes matrices, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (a) Halla D^{-1} y explica el resultado obtenido. (b) Obtén: $C + A \cdot B$ (c) Calcula: $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ (d) $(C + A \cdot B)^{-1}$	BH2
-----	---	-----

RESOLUCIÓN apartado a:

$$D^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \rightarrow (4) \quad (-1) \rightarrow (2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 8 & 0 & 0 & 4 & -2 & -9 \\ \frac{1}{4} & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{9}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Así pues, si multiplicamos las matrices $D \cdot D^{-1}$ o bien $D^{-1} \cdot D$, obtenemos de ambas formas la matriz unidad I .

RESOLUCIÓN apartado b:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 **RESOLUCIÓN apartado c:**

$$C^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} (-1) & (1) & 1 & -1 & | & 1 & 0 \\ (1) & & 1 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1) & & 1 & -1 & | & 1 & 0 \\ (1) & & 0 & 1 & | & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 1 & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Intercambiamos} \\ \text{las filas} \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} (1) & (-1) & 1 & 1 & | & 0 & 1 \\ (-1) & & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (-1) & & -1 & 0 & | & -1 & 1 \\ (1) & & 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 **RESOLUCIÓN apartado d:**

$$C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(C + A \cdot B)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (C + A \cdot B)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 **RESOLUCIÓN:**

Apartado a:	Apartado b:	Apartado c:	Apartado d:
Mat D ⁻¹	Mat C+Mat A×Mat B	Mat C ⁻¹ +<Mat A×Mat B> ⁻¹	<Mat C+Mat A×Mat B> ⁻¹
Ans 1 2 3 1 0.5 -0.25 -1.125 2 0 0.5 0.25 3 0 0 0.5 -9.8	Ans 1 2 1 0 0 2 0 1 1	Ans 1 2 1 0 0 2 0 1 1	Ans 1 2 1 0 0 2 0 1 1

RANGO DE UNA MATRIZ

Una matriz de dimensión $m \times n$ puede ser interpretada como un conjunto de m vectores fila o como un conjunto de n vectores columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}) \\ (a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \cdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

De idéntica manera podría interpretarse la matriz en un conjunto de vectores columna y escribir:

$$A = (A^1 \ A^2 \ A^3 \ \cdots \ A^n).$$



Un vector $\vec{w}$ es una **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, si para ciertos escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ (que se llaman coeficientes), se verifica:

$$\vec{w} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n$$



Un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es **linealmente dependiente o ligado** si alguno de sus vectores es combinación lineal de los restantes. En caso contrario decimos que el conjunto de vectores es **linealmente independiente o libre**.

Concepto: Se llama **rango o característica** de una matriz A de dimensión $m \times n$, al número de filas o columnas linealmente independientes y se denota por $rg(A)$. El número de filas linealmente independientes siempre coincide con el número de columnas linealmente independientes.

$$rg(A) = rg(A_1, A_2, A_3, \dots, A_m) = rg(A^1, A^2, A^3, \dots, A^n)$$

El cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss consiste en transformar la matriz original mediante operaciones elementales por filas en una matriz triangular superior. El rango es el número de filas no nulas.



Se puede demostrar que las operaciones elementales por filas no varían el rango de la matriz sobre la que actúan

Cálculo del rango por el método de Gauss.

028	Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Comenta lo que haces	BH2
-----	---	-----



RESOLUCIÓN:

En la práctica se realiza de la siguiente forma, intentando conseguir una matriz triangular superior:



$$\begin{matrix} (-1) \\ (2) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} (-1) \\ (1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez que obtenemos una matriz triangular superior, el rango vendrá dado por el número de filas que obtenemos que NO estén constituidas por ceros (0) en su totalidad.

$$\text{Rango (A)} = 2$$

029	Calcula el rango de la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Coméntalo.	BH2
-----	--	-----



RESOLUCIÓN:

En la práctica se realiza de la siguiente forma, intentando conseguir una matriz triangular superior:

$$\begin{matrix} (1) \\ (1) \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ (1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez que obtenemos una matriz triangular superior, el rango vendrá dado por el número de filas que obtenemos que no estén constituidas por ceros (0) en su totalidad.

$$\text{Rango (B)} = 1$$



030

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde "m" es un parámetro real. Determina el rango de M según los distintos valores de m.

BH2

 **RESOLUCIÓN:**

$$\begin{array}{l} (-2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m \\ (1) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2+m \\ 0 & 2-2m & -1+m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-2m & -1+m \\ 0 & 0 & 2+m \end{pmatrix} \end{array}$$

Estudiamos los diferentes casos:

(a) $2 + m = 0$

$m = -2 \rightarrow$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-2(-2) & -1+(-2) \\ 0 & 0 & 2+(-2) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$\text{Rango}(M) = 2$

(b)

$$\begin{array}{l} 2 - 2m = 0 \rightarrow -2m = -2 \\ m = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -1 + m = 0 \\ m = 1 \end{array}$$

$m = 1 \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-2 \cdot 1 & -1+1 \\ 0 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\text{Rango}(M) = 2$

$$\begin{array}{ll} m = -2 \text{ y } m = 1 & \rightarrow \text{Rango}(M) = 2 \\ m \neq -2 \text{ y } m \neq 1 & \rightarrow \text{Rango}(M) = 3 \end{array}$$

Forma matricial de un sistema de ecuaciones.

031

Realiza las operaciones que veas a continuación y resuelve el ejercicio indicando las propiedades que aplicas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

BH2

 **RESOLUCIÓN:**

Aplicando la definición de producto de matrices

$$\begin{pmatrix} x+3y+3z \\ x+4y+3z \\ x+3y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la definición de igualdad de matrices

$$\left. \begin{array}{l} x+3y+3z=2 \\ x+4y+3z=0 \\ x+3y+4z=-1 \end{array} \right\}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss obteniendo por soluciones:

$x = 17 \quad y = -2 \quad z = -3$

¿QUÉ OCURRIRÍA SI NOS DIESEN UN SISTEMA DE ECUACIONES Y TUVIÉSEMOS QUE ESCRIBIRLO EN FORMA MATRICIAL?:





Fijándonos en el desarrollo del ejercicio anterior observamos que lo pondríamos de la siguiente forma:

Matriz de los coeficientes	·	Matriz de las incógnitas	=	Matriz de los términos inde- pendientes
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

032	La matriz de coeficientes (A) asociada a cierto sistema de ecuaciones lineales así como la de sus términos independientes (B) son las siguientes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ (a) Deducir las ecuaciones del sistema indicando las operaciones matriciales hechas (b) Obtén, si es posible, la inversa de las matrices A y B. Razona las respuestas. (c) Calcula el rango de la matriz A.	BH2
PAU Universidad de Oviedo Septiembre 1995 Matemáticas Aplicadas a las CCSS		

RESOLUCIÓN apartado a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la definición de producto de matrices

$\begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-y+z \\ 5x+y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$	Aplicando la definición de igualdad de matrices	$\left. \begin{aligned} x+y+z &= 12 \\ 2x-y+z &= 6 \\ 5x+y-2z &= 2 \end{aligned} \right\}$
---	--	--

RESOLUCIÓN apartado b:

Calculamos la matriz inversa de A por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (-2) \\ (1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} (-5) \\ \\ (1) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (-4) \\ (3) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \begin{matrix} (17) \\ (-1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 & -7 & -4 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} (17) \\ (1) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (3) \\ (1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 17 & 17 & 0 & 10 & -4 & 3 \\ 0 & -51 & 0 & -27 & 21 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -7 & -4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \begin{matrix} (\frac{1}{51}) \\ (-\frac{1}{51}) \\ (-\frac{1}{17}) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 51 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & -51 & 0 & -27 & 21 & -3 \\ 0 & 0 & -17 & -7 & -4 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{17} & \frac{3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{9}{17} & -\frac{7}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{4}{17} & -\frac{3}{17} \end{pmatrix}$$

La matriz B no tiene inversa ya que no es cuadrada.

RESOLUCIÓN apartado c:

$$\begin{matrix} (-2) \\ (1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} (-5) \\ \\ (1) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} (-4) \\ (3) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Una vez que obtenemos una matriz triangular superior, el rango vendrá dado por el número de filas que obtenemos que no estén constituidas por ceros (0) en su totalidad.

Solución: Rango de A = 3

Resolución de sistemas de ecuaciones por el MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA.

033

Resuelve el siguiente sistema por el método de la matriz inversa:

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 2 \\ x + 4y + 3z = 0 \\ x + 3y + 4z = -1 \end{cases}$$

BH2



RESOLUCIÓN:

Expresamos el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por la izquierda ambos miembros de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Como $A^{-1} \cdot A = I$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Averiguamos la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} (-1) & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ (1) & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} (-1) \\ (1) \end{array}} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{(-3)} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y efectuamos el producto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS**

Resuelve el siguiente sistema por el método de la matriz inversa:

$$(a) \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x-y+2z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 2x-y-z=0 \\ x-y-z=8 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ 2x+2y-4z=-10 \\ 2x+y+3z=16 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x+4y+7z=3 \\ 2x+5y+8z=-1 \\ 3x+6y+9z=1 \end{cases}$$

BH2

ECUACIONES MATRICIALES

Es una igualdad literal de matrices que no es cierta para cualquier valor de las incógnitas, siendo estas incógnitas una matriz.



1. - Para despejar, hay que observar si la multiplicación se va realizar por la derecha o por la izquierda, ya que el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa.

2. - Es aconsejable despejar la matriz que queremos obtener antes de efectuar las operaciones.

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula el valor de la matriz X en los siguientes casos:

034

- (a) $C \cdot X = D$
 (b) $C \cdot X + D = E$
 (c) $X \cdot C + D = 3E$
 (d) $C \cdot X + D \cdot X = E$
 (e) $X \cdot C + X \cdot D - X \cdot E = I$
 (f) $A \cdot B = X \cdot C$

BH2

**RESOLUCIÓN apartado a:**

(a) $C \cdot X = D$

Multiplicamos ambos miembros por la inversa de C por la izquierda

$$C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot D$$

$$X = C^{-1} \cdot D$$

$$C^{-1} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} -1) & 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 1) & 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{array} \quad C^{-1} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -1 & 1 \end{array}$$

$$C^{-1} \rightarrow \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & | & 3 & -2 \\ 0 & 1 & | & -1 & 1 \end{array} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1} \cdot D =$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**RESOLUCIÓN:**

Mat C⁻¹×Mat D

Mat M+L Det Trn AU3

Ans

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Mat M+L Det Trn AU3



NOTA: Llegado este momento, donde el objetivo de "saber realizar con lápiz y papel operaciones con matrices" ya está suficientemente trabajado, es cuando podemos dedicarnos a realizar y

reflexionar acerca de cómo poder efectuar los primeros pasos de las ecuaciones matriciales para obtener la solución final. Esta última parte tan "denostada y temida" por los alumnos proponemos realizarla con la ayuda de herramientas informáticas, entre las que podemos destacar el uso de calculadoras.

(b) $C \cdot X + D = E$

$$C \cdot X = E - D$$

$$C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot (E - D)$$

$$X = C^{-1} \cdot (E - D)$$

Mat C-1x(Mat E-Mat D)	Ans $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$
Mat M+L Det Trn AUS	Mat M+L Det Trn AUS -4

(c) $X \cdot C + D = 3E$

$$X \cdot C = 3E - D$$

$$X \cdot C \cdot C^{-1} = (3E - D) \cdot C^{-1}$$

$$X = (3E - D) \cdot C^{-1}$$

(3Mat E-Mat D)xMat C-1	Ans $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 12 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
Mat M+L Det Trn AUS	Mat M+L Det Trn AUS -14

(d) $C \cdot X + D \cdot X = E$

$$(C + D) \cdot X = E$$

$$(C + D)^{-1} \cdot (C + D) \cdot X = (C + D)^{-1} \cdot E$$

$$X = (C + D)^{-1} \cdot E$$

(Mat C+Mat D)-1xMat E	Ans $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -0.5 & 2 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix}$
Mat M+L Det Trn AUS	Mat M+L Det Trn AUS -1.2

(e) $X \cdot C + X \cdot D - X \cdot E = I$

$$X \cdot (C + D - E) = I$$

$$X \cdot (C + D - E) \cdot (C + D - E)^{-1} = I \cdot (C + D - E)^{-1}$$

$$X = I \cdot (C + D - E)^{-1}$$

Identity 2x(Mat C+Mat D-Mat E)-1	Ans $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.3333 & 0 \\ -0.166 & 0.25 \end{bmatrix}$
	1.3

(f) $A \cdot B = X \cdot C$

$$A \cdot B \cdot C^{-1} = X \cdot C \cdot C^{-1}$$

$$A \cdot B \cdot C^{-1} = X$$

$$X = A \cdot B \cdot C^{-1}$$

Mat AxMat BxMat C-1	Ans $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$
	3

035

¿Tiene solución la siguiente ecuación matricial $B \cdot X = C$? En caso afirmativo, calcula dicha solución, siendo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BH2

RESOLUCIÓN:

$$B \cdot X = C$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot X = B^{-1} \cdot C$$

$$X = B^{-1} \cdot C$$

Mat B-1xMat C	Ans $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Mat M+L Det Trn AUS	Mat M+L Det Trn AUS 0





036



Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BH2

(a) Calcula una matriz X que verifique $X - B^2 = A \cdot B$ **RESOLUCIÓN:**

$$X - B^2 = A \cdot B$$

$$X - B^2 + B^2 = A \cdot B + B^2$$

$$X = A \cdot B + B^2$$

(Mat A+Mat B)×Mat B

$$\text{Ans} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mat M+L Det Trn Au3 2

037



Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$$

BH2

(a) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot B + C \cdot X = D$ **RESOLUCIÓN:**

$$A \cdot B + C \cdot X = D$$

$$C \cdot X = D - A \cdot B$$

$$C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot (D - A \cdot B)$$

$$X = C^{-1} \cdot (D - A \cdot B)$$

A·B

$$\text{Ans} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Mat M+L Det Trn Au3 -7

D - A·B

$$\text{Ans} \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$$

Mat M+L Det Trn Au3 -2

C⁻¹

$$\text{Ans} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

-2

C⁻¹·(D - A·B)

$$\text{Ans} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mat M+L Det Trn Au3 -2

PROBLEMAS PROPUESTOS

038

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

BH2

Resuelve $XA = B + C$

039

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

BH2

Resuelve $AB + CX = D$

040

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

BH2

Resuelve (a) $AX = B$ (b) $XA = B$

¿Por qué sale distinto?

041

Resuelve:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + X \cdot 2 - 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

BH2

042	Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Resuelve $X - B^2 = A \cdot B$	BH2 
043	Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ Resuelve (a) $3 \cdot X - 2 \cdot A = 5 \cdot B$ (b) $X \cdot A + B^t - I = A$ (c) Resuelve la siguiente expresión: $ A^3 + 3 A^t + I - 3 B $	BH2 
044	Demuestra que si A es una matriz, entonces $M = A \cdot A^t$ es una matriz simétrica. Pista: Calcula la matriz transpuesta de M .	BH2 
045	Demuestra que si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es una matriz simétrica y $A - A^t$ es una matriz antisimétrica	BH2 
046	Demuestra que toda matriz cuadrada A puede descomponerse en la suma de una matriz simétrica más otra antisimétrica puesto que: $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$	BH2 
047	Demuestra que si $A \cdot B = A \cdot C$ y A es una matriz regular, entonces $B = C$. Pista: multiplica ambos miembros de la igualdad primera por A^{-1} y simplifica	BH2 
048	Demuestra que si $A^2 = A$ y $A \neq I$, entonces no existe A^{-1} . Pista: multiplica ambos miembros de la igualdad primera por A^{-1} y simplifica.	BH2 
049	Demuestra que si $A^2 = O$, entonces no existe A^{-1} .	BH2 

Aplicación de las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de situaciones que manejen datos estructurados en forma de tablas

En estos momentos, en los que el alumnado ya ha alcanzado los conocimientos suficientes y necesarios para desenvolverse en los contenidos de las de matrices, podremos afrontar la parte de la unidad didáctica que satisface la mayoría de los **objetivos** propuestos al comienzo del tema.

-  Representar e interpretar tablas de números mediante una matriz, identificando los elementos concretos de la misma.
-  Saber las principales aplicaciones de las matrices y utilizarlas para representar e interpretar ecuaciones.
-  Interpretar y manejar las matrices, con sus propiedades, en problemas extraídos de contextos reales.
-  Utilizar el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de situaciones que manejen datos estructurados en forma de tablas, resolviendo situaciones diversas de las Ciencias Sociales.

La novedad estriba en la **METODOLOGÍA** utilizada para la resolución de estos problemas, utilizando como herramienta habitual la **CALCULADORA CIENTÍFICA O GRÁFICA**, intentando concienciar al profesorado sobre las posibilidades que ofrecen y que, como ya he mencionado anteriormente, permitirán ayudarnos a comprender su **significado**, **examinar las operaciones necesarias en cada caso**, **interpretando y analizando críticamente las soluciones obtenidas**, obviando el farragoso



trabajo de realizar cálculos repetitivos; en definitiva, dando prioridad al razonamiento, objetivo fundamental de este Bachillerato, sobre el cálculo.



Se trata de potenciar el pensamiento crítico, la creatividad, la toma de decisiones..., fomentando el "enseñar para comprender".

A continuación presentamos una batería de actividades, de forma graduada y sopesada, introduciendo paulatinamente conceptos nuevos, que van consolidando los anteriores, cada vez más difíciles y complicados, tocando diversos aspectos y creando la necesidad de utilizar las matrices, sus aplicaciones, el significado real de las operaciones matriciales, intentando conseguir que el alumnado vaya interiorizando su uso que es, como ya hemos dicho, el OBJETIVO FUNDAMENTAL DEL BACHILLERATO DE CIENCIAS SOCIALES.

SUMA Y RESTA DE MATRICES.

050	Una fábrica de automóviles dispone en el mes de junio de tres modelos: económico, de lujo y deportivo. En determinada ciudad la firma posee tres concesionarios, A, B, y C. En cierto momento, el concesionario A posee en stock 3 económicos, 2 de lujo y 1 deportivo; el concesionario B, respectivamente, 6, 1 y 1; por último, el concesionario C tiene, también respectivamente, 2, 3 y 3 vehículos. (a) A partir de estos datos, formar la matriz M correspondiente y señala sus dimensiones. En el mes de julio llega otro envío. Para el concesionario A el envío está compuesto por 5 económicos, 12 de lujo y 5 deportivos; para el concesionario B, respectivamente, 3, 4 y 1; por último, para el concesionario C, también respectivamente, 4, 3 y 6 vehículos. (b) Dispón en forma de matriz N el envío del mes de julio y señala sus dimensiones. (c) ¿De cuántos coches de cada modelo dispone cada concesionario a lo largo de los meses de junio y julio?. Exprésalo en forma de matriz. (d) Señala el elemento c_{32} de la matriz del apartado anterior y coméntalo.	BH2
-----	--	-----

RESOLUCIÓN apartados a y b:

Como se puede ver, los ejercicios suelen tener enunciados largos, con mucha información, tanta que la mayoría de los alumnos se pierden antes de llegar al final, sobre todo pensando en la gran cantidad de cálculos aritméticos que les esperan. Pero estos son nuestros objetivos: "saber extraer y resumir organizadamente el problema, traducirlo, representarlo de la forma más sencilla y entendible y realizar las operaciones encaminadas a resolverlo".

(a) <u>Junio:</u>				(b) <u>Julio:</u>			
<i>Concesionarios</i>				<i>Concesionarios</i>			
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
<i>Económico</i>	3	6	2	<i>Económico</i>	5	3	4
<i>M = Lujo</i>	2	1	3	<i>N = Lujo</i>	12	4	3
<i>Deportivos</i>	1	1	3	<i>Deportivos</i>	5	1	6
Dimensión: 3 x 3				Dimensión: 3 x 3			

RESOLUCIÓN apartados a y b:

M	1	2	3
1	3	6	2
2	2	1	3
3	1	1	3

3

R-OP ROW COL

N	1	2	3
1	5	3	4
2	12	4	3
3	5	1	6

5

R-OP ROW COL

RESOLUCIÓN apartado c:



Ahora llega lo verdaderamente difícil para el alumnado:

- Tomar la decisión de qué operación u operaciones hay que realizar para obtener la solución a lo que se pregunta.
- Cómo colocar las matrices para que se puedan operar.

En esta ACTIVIDAD esto es muy sencillo ya que se trata de una simple suma de matrices, pero en otros sucesivos resulta muchas veces inalcanzable para la generalidad; realmente esto es lo que se pretende en un Bachillerato de Ciencias Sociales, y no tanto que sepan manejar el algoritmo, tan largo, monótono y pesado en la mayoría de los casos, que cualquier confusión en una simple suma, producto etc. te produce tal desencanto que muchas veces hace desistir al llegar a la mitad del ejercicio, sin tan siquiera llegar a comentar y investigar los resultados finales, otro de los grandes objetivos del tema, muchas veces "trucados" para que salgan conclusiones "interesantes" de analizar, pero que al tener alguna equivocación de cálculo, no se llegan a producir.

$$M + N = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 12 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 14 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$



RESOLUCIÓN apartado c:

Mat M+Mat N	Ans 1 2 3 $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 14 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ Mat M+L Det Trn AUG 8	Concesionarios A B C Económico $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ Lujo $\begin{pmatrix} 14 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ Deportivos $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$
-------------	--	---



RESOLUCIÓN apartado d:

El elemento c_{32} de la matriz del apartado anterior indica que el concesionario B tiene 2 coches deportivos a lo largo de los meses de junio y julio.

Ans 1 2 3
 $\begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 14 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$
 Mat M+L Det Trn AUG 2

PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UNA MATRIZ

051	Una fábrica de electrodomésticos produce televisores, radios, lavavajillas y aspiradoras. Con objeto de atender de forma más rápida los pedidos de los establecimientos comerciales del ramo, dispone de tres almacenes en la ciudad. En el mes de enero se guardan en el almacén A, 12 televisores, 18 radios, 10 lavavajillas y 24 aspiradoras. En el almacén B, hay respectivamente, 8, 15, 12 y 30. Por último, en el C están almacenados, también respectivamente, 16, 12, 10 y 22. (a) Dispón los anteriores datos organizadamente en forma de matriz, llámala P y señala sus dimensiones. (b) Si en febrero dispone del triple de cada uno de los artículos, expresa en forma de matriz las existencias durante ese mes. (c) Si en marzo tiene tanto como en enero, expresa en forma de matriz las existencias acumuladas en los tres meses.	BH2
-----	---	-----



RESOLUCIÓN apartado a:

Enero:

$P = \begin{matrix} & A & B & C \\ \text{Televisores} & 12 & 8 & 16 \\ \text{Radios} & 18 & 15 & 12 \\ \text{Lavavajillas} & 10 & 12 & 10 \\ \text{Aspiradoras} & 24 & 30 & 22 \end{matrix}$	$P \begin{bmatrix} 12 & 8 & 16 \\ 18 & 15 & 12 \\ 10 & 12 & 10 \\ 24 & 30 & 22 \end{bmatrix}$ R-OP ROW COL 12
--	--



Dimensión: 4 x 3

RESOLUCIÓN apartado b:**Febrero:**

	A	B	C	
Televisores	36	24	48	
$3 \cdot P =$ Radios	54	45	36	
Lavavajillas	30	36	30	
Aspiradoras	72	90	66	

Ans

1	36	24	48
2	54	45	36
3	30	36	30
4	72	90	66

36

Mat M+L Det Trn AUS

RESOLUCIÓN apartado c:Enero + Febrero + Marzo = $P + 3P + P = 5P$

	A	B	C	
Televisores	60	40	80	
$5P =$ Radios	90	75	60	
Lavavajillas	50	60	50	
Aspiradoras	120	150	110	

Ans

1	60	40	80
2	90	75	60
3	50	60	50
4	120	150	110

60

LIST MAT CPLX CALC STAT

052

Una compañía de muebles fabrica butacas y mecedoras de tres modelos: E, modelo económico; M, modelo medio y L, de lujo. Cada mes la compañía produce 20 modelos E, 15 M y 10 L de butacas, y 12 modelos E, 8 M y 5 L de mecedoras.

(a) Representa en una matriz 3×2 dicha información.

(b) A partir de la matriz del apartado anterior, obtén la matriz de producción en un trimestre.

BH2

RESOLUCIÓN apartado a:**RESOLUCIÓN apartado b:**

Butac Meced.		But Mec	
$E \begin{pmatrix} 20 & 12 \end{pmatrix}$		$E \begin{pmatrix} 60 & 36 \end{pmatrix}$	
$M \begin{pmatrix} 15 & 8 \end{pmatrix}$		$M \begin{pmatrix} 45 & 24 \end{pmatrix}$	
$L \begin{pmatrix} 10 & 5 \end{pmatrix}$		$L \begin{pmatrix} 30 & 15 \end{pmatrix}$	

Ans

1	60	36
2	45	24
3	30	15

60

INCREMENTOS COMPUESTOS

Bajo este epígrafe hemos colocado este tipo de ejercicios en los que las cantidades a calcular se van acumulando a las obtenidas inmediatamente anteriores.

		1	2	3	
	A	6.2	9	4.1	
	B	8.5	13.5	6.2	
	C	12.5	19.4	9.1	
	D	17.2	25.2	12	

053

El precio de una vivienda, en función de la zona de la ciudad y del número de habitaciones, viene dado por la siguiente matriz Q:

Donde las cantidades se expresan en millones de pesetas. Cada año se incrementa el precio en un 10%.

(a) Señala el significado del elemento a_{13} de la matriz.

(b) ¿Cuál será la matriz correspondiente después de tres años?. Señala sus dimensiones.

(c) Comenta brevemente los datos del enunciado.

BH2

RESOLUCIÓN apartado a:

Quiere decir que en la zona A, el precio de una casa de 3 habitaciones costará 4.1 millones de pesetas.

RESOLUCIÓN apartado b:

$$1^\circ \text{ año} \rightarrow \frac{110}{100} \cdot P = 1.1P$$

$$2^\circ \text{ año} \rightarrow 1.1 \cdot 1.1P = 1.21P$$

$$3^\circ \text{ año} \rightarrow 1.1 \cdot 1.21P = 1.331P$$

1.331Mat Q	Ans
Mat M+L Det Trn Ans	1 8.2522 11.979 5.4571
	2 11.313 17.968 8.2522
	3 16.637 25.821 12.112
	4 22.893 33.541 15.972
	8.2522
	Mat M+L Det Trn Ans

NOTA: En este ejercicio se puede ya observar lo farragoso de los cálculos aritméticos que no mejoran ninguna destreza matemática y que restan tiempo para analizar resultados o bien para poder hacer más problemas.



RESOLUCIÓN apartado c:

Existe cierta incoherencia en el hecho de que en una misma zona los pisos de 3 habitaciones son los más baratos, es decir, cuestan menos que de 1 ó 2 habitaciones.

054	Dos concesionarios, A y B, de una marca de automóviles, venden los modelos X, Y, Z. El volumen de ventas de cada modelo, en el mes de Enero, viene dado por la matriz: $A \begin{pmatrix} 42 & 30 & 12 \end{pmatrix}$ $B \begin{pmatrix} 30 & 10 & 24 \end{pmatrix}$ donde las cifras expresan millones de pesetas. Si en febrero se experimenta un 12% de aumento en las ventas, en marzo un 10% respecto del mes anterior, en abril un descenso del 8%, igualmente respecto del mes anterior, en mayo de nuevo un 8% de descenso y en junio un 18% de aumento. (a) Señala el significado del elemento a_{12} de la matriz. (b) Determina mediante matrices el volumen total de ventas del semestre por modelo y concesionario. Analiza y comenta los resultados.	BH2
-----	---	-----



RESOLUCIÓN apartado a:

El concesionario A vende 30 millones de PTAS del modelo Y.



RESOLUCIÓN apartado b:

Enero $\rightarrow 1 \cdot P$

Febrero $\rightarrow \frac{110}{100} P = 1.12P$

Marzo $\rightarrow \frac{110}{100} \cdot \frac{112}{100} P = 1.232P$

Abril $\rightarrow \frac{92}{100} \cdot 1.232P = 1.13344P$

Mayo $\rightarrow \frac{92}{100} \cdot 1.13344P = 1.0427648P$

Junio $\rightarrow \frac{118}{100} \cdot 1.0427648P = 1.2304625P$

Volumen total ventas por semestre, modelo y concesionario:

Enero + Febrero + Marzo + Abril + Mayo + Junio = 6.7586673 P

1+1.12+1.232+1.13344+ 1.0427648+1.2304625 6.7586673 Ans×Mat R	Ans
Mat M+L Det Trn Ans	1 283.86 202.76 81.104
	2 202.76 67.586 162.2
	283.8640266
	Mat M+L Det Trn Ans

COMENTARIO Y ANÁLISIS



Durante el semestre, en el concesionario A se han vendido 283 864 025 PTAS del modelo X, 202 760 017 PTAS del modelo Y y 81 104 007 PTAS del modelo Z.

Durante el semestre, en el concesionario B se han vendido 202 760 017 PTAS del modelo X, 67 586 672 PTAS del modelo Y y 162 208 014 PTAS del modelo Z.



PRODUCTO DE MATRICES

055	Un proveedor A de aparatos de televisión en color tiene 7 aparatos de 14 pulgadas, 18 de 21, 6 de 24 y 10 de 26 y un proveedor B tiene 5 de 14 pulgadas, 12 de 21, 7 de 24 y 4 de 26. Los precios de cada uno de ellos son: 29 950, 55 000, 65 000 y 110 000 PTAS, respectivamente. Expresa, por medio de matrices, el precio total de venta de cada proveedor.	BH2
-----	---	-----

Las dificultades reales en estos problemas siguen siendo la transcripción del enunciado en matrices y, sobre todo, colocar las matrices en la forma correcta para efectuar la operación que se considere oportuna; lo demás es paciencia para realizar arduas y numerosas sumas y multiplicaciones que nos lleven al resultado.

RESOLUCIÓN:

$Y = \begin{matrix} & \text{Pulgadas} \\ & 14 & 21 & 24 & 26 \\ \text{Proveedor A} & \begin{pmatrix} 7 & 18 & 6 & 10 \end{pmatrix} \\ \text{Proveedor B} & \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$	$Z = \begin{matrix} & \text{PTAS} \\ 14'' & \begin{pmatrix} 29\,950 \\ 55\,000 \\ 65\,000 \\ 110\,000 \end{pmatrix} \\ 21'' \\ 24'' \\ 26'' \end{matrix}$
---	---

El precio total de ventas será:

$$Y \cdot Z =$$

$$\begin{matrix} & \text{Pulgadas} \\ & 14 & 21 & 24 & 26 \\ \text{Proveedor A} & \begin{pmatrix} 7 & 18 & 6 & 10 \end{pmatrix} \\ \text{Proveedor B} & \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & \text{PTAS} \\ 14'' & \begin{pmatrix} 29\,950 \\ 55\,000 \\ 65\,000 \\ 110\,000 \end{pmatrix} \\ 21'' \\ 24'' \\ 26'' \end{matrix} =$$

$2 \times 4 \qquad \qquad 4 \times 1$

$\begin{matrix} & \text{PTAS} \\ \text{Proveedor A} & \begin{pmatrix} 2\,689\,650 \\ 1\,704\,750 \end{pmatrix} \\ \text{Proveedor B} & \end{matrix}$ 2×1

RESOLUCIÓN:

--	--

COMENTARIO Y ANÁLISIS

Las ventas totales del proveedor A ascienden a 2 689 650 PTAS y las del proveedor B ascienden a 1 704 750 PTAS.

056	Una cadena de grandes almacenes tiene 4 tiendas, A, B, C y D. Vende tres tipos de perfumes, 1, 2 y 3, a 1200, 2500 y 1800 PTAS, respectivamente. En un momento determinado, la tienda A tiene 24 frascos del tipo 1, 12 del tipo 2 y 14 del 3, La tienda B, 16, 12 y 32, respectivamente. También respectivamente, la tienda C, 40, 10 y 30. Por último, las cifras correspondientes a D son 28, 18 y 26. (a) Dispón estos datos en forma de matrices y señala sus dimensiones. (b) Señala y di el significado del elemento W_{12} (c) Averigua, con ayuda de las matrices, cuáles serán los ingresos totales obtenidos por la venta de perfumes en cada tienda. (d) Comentario y análisis	BH2
-----	--	-----

RESOLUCIÓN apartado a:

$$\begin{array}{c}
 \text{perfumes} \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 A & \begin{pmatrix} 24 & 12 & 14 \end{pmatrix} \\
 B & \begin{pmatrix} 16 & 12 & 32 \end{pmatrix} \\
 C & \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \end{pmatrix} \\
 D & \begin{pmatrix} 28 & 18 & 26 \end{pmatrix}
 \end{array} \\
 W = \text{Tiendas}
 \end{array}$$

Dimensión: 4 x 3

$$\begin{array}{c}
 \text{perfumes} \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 X = \text{Ptas} & \begin{pmatrix} 1.200 & 2.500 & 1.800 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Dimensión: 1 x 3

**RESOLUCIÓN:**

$$\begin{array}{c}
 W \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 1 & 24 & 12 & 14 \\
 2 & 16 & 12 & 32 \\
 3 & 40 & 10 & 30 \\
 4 & 28 & 18 & 26
 \end{array}
 \end{array}$$

R-OP ROW COL 24

$$\begin{array}{c}
 X \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 1 & 1200 & 2500 & 1800
 \end{array}
 \end{array}$$

R-OP ROW COL 1200

**RESOLUCIÓN apartado b:**

Significa que en la tienda A disponen de 12 frascos de perfume del tipo 2.

**RESOLUCIÓN apartado c:**

El alumno suele tomar la decisión de efectuar el **producto**, pero acostumbra a coger la opción equivocada y efectúa $W \cdot X$, tal y como están, por lo que la calculadora le da error, puesto que debido a las dimensiones de las dos matrices, éstas no se pueden multiplicar en este sentido. Es en este momento cuando se puede hacer hincapié sobre la **importancia de la matriz traspuesta** ya que, para que verdaderamente se puedan multiplicar, se ha de hacer W por la traspuesta de X :

**RESOLUCIÓN:**

$$\begin{array}{c}
 \text{perfumes} \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 A & \begin{pmatrix} 24 & 12 & 14 \end{pmatrix} \\
 B & \begin{pmatrix} 16 & 12 & 32 \end{pmatrix} \\
 C & \begin{pmatrix} 40 & 10 & 30 \end{pmatrix} \\
 D & \begin{pmatrix} 28 & 18 & 26 \end{pmatrix}
 \end{array} \\
 \text{Tiendas}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \text{PTAS} \\
 \begin{array}{c}
 1 \begin{pmatrix} 1200 \\ 2500 \\ 1800 \end{pmatrix} \\
 2 \begin{pmatrix} 1200 \\ 2500 \\ 1800 \end{pmatrix} \\
 3 \begin{pmatrix} 1200 \\ 2500 \\ 1800 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \text{PTAS} \\
 \begin{array}{c}
 A \begin{pmatrix} 84\,000 \\ 106\,800 \\ 127\,000 \\ 125\,400 \end{pmatrix} \\
 B \\
 C \\
 D
 \end{array}
 \end{array}$$

**RESOLUCIÓN:**

Mat WxTrn Mat X

Mat M+L Det Trn Ans

Ans 1
1 84000
2 106800
3 127000
4 125400

84000

Mat M+L Det Trn Ans

**RESOLUCIÓN apartado d:**

La tienda A ingresa 84 000 PTAS en concepto de perfumes, la tienda B ingresa 106 800 PTAS, la tienda C ingresa 127 000 PTAS y la tienda D ingresa 125 400 PTAS, asimismo, en concepto de perfumes.

057



Tres agentes de bolsa, Pedro, Jorge y María, tienen acciones de tres importantes grupos bancarios: Argentaria, BBV y Santander.

Pedro tiene 18, 20 y 50 acciones, Jorge, 25, 32 y 28 acciones, y María, 10, 51 y 42 acciones, respectivamente.

(a) Dispón organizadamente estos datos mediante una matriz.

(b) Señala el elemento a_{23} del apartado anterior e interprétalo.

(c) Si en el momento de venderlas, éstas se encuentran a 5.900 PTAS, 3.075 PTAS y 6.650 PTAS cada una, respectivamente, calcula matricialmente cuál será el importe total en PTAS que recibirán los 3 agentes de bolsa. Analiza y comenta el resultado final.

BH2

**RESOLUCIÓN apartado a:**



	Acciones		
	Arg	BBV	Santander
Pedro	18	20	50
Jorge	25	32	28
María	10	51	42

**RESOLUCIÓN apartado b:**

El elemento a_{23} nos indica que el agente de bolsa Jorge tiene 28 acciones del Banco de Santander.

**RESOLUCIÓN apartado c:**

$$\begin{array}{c}
 \text{Arg} \quad \text{BBV} \quad \text{Santa.} \\
 \text{Pedro} \begin{pmatrix} 18 & 20 & 50 \end{pmatrix} \\
 \text{Jorge} \begin{pmatrix} 25 & 32 & 28 \end{pmatrix} \\
 \text{María} \begin{pmatrix} 10 & 51 & 42 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{c}
 \text{PTAS / acción} \\
 \text{Arg.} \begin{pmatrix} 5900 \\ 3075 \\ 6650 \end{pmatrix} =
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{TOTAL} \quad \text{PTAS} \\
 \text{Pedro} \begin{pmatrix} 18 \cdot 5900 + 20 \cdot 3075 + 50 \cdot 6650 \end{pmatrix} = \text{Pedro} \begin{pmatrix} 500200 \\ 432100 \\ 495125 \end{pmatrix} \\
 \text{Jorge} \begin{pmatrix} 25 \cdot 5900 + 32 \cdot 3075 + 28 \cdot 6650 \end{pmatrix} \\
 \text{María} \begin{pmatrix} 10 \cdot 5900 + 51 \cdot 3075 + 42 \cdot 6650 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

El agente de bolsa Pedro tendrá 500 200 PTAS en acciones, Jorge tendrá 432 100 PTAS y María tendrá 495 125 PTAS en acciones.

058

Tres personas, A, B y C, que salen de compras, entran en una tienda a comprar fruta. A compra 12 naranjas, 5 melocotones, 20 manzanas, 6 plátanos y tres limones, B compra 20 naranjas, 3 melocotones, 10 manzanas y 4 plátanos, C compra 10 naranjas, 10 melocotones y 12 plátanos.

Supongamos que las naranjas cuestan 10 PTAS cada una, los melocotones 20 PTAS cada uno, las manzanas 8 PTAS la pieza, los plátanos 6 PTAS la unidad y los limones 5 PTAS.

(a) Propón una matriz P que resuma los productos que compra cada persona y señala sus dimensiones.

(b) Propón una matriz M que indique los precios por unidad de cada producto.

(c) Calcula, mediante matrices, la cantidad total de dinero gastada por cada persona. Analiza y comenta los resultados.

(d) Sabiendo que la cotización del EURO está en 1 EURO = 166.386 PTAS, ¿Cuántos EUROS se gastó en total cada persona?. Resuélvelo mediante matrices.

(e) Si hiciesen esta misma compra durante 7 días. Calcula, mediante matrices, la cantidad de cada pieza comprada a lo largo de este periodo de tiempo.

BH2

RESOLUCIÓN apartado a:**RESOLUCIÓN:****RESOLUCIÓN:**

$$\begin{array}{c}
 \text{Nar} \quad \text{Mel} \quad \text{Man} \quad \text{Pla} \quad \text{Li} \\
 A \begin{pmatrix} 12 & 5 & 20 & 6 & 3 \end{pmatrix} \\
 P = B \begin{pmatrix} 20 & 3 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\
 C \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Dimensión: 3 x 5

$$\begin{array}{c}
 P \quad \begin{matrix} \leftarrow 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\
 \begin{pmatrix} 12 & 5 & 20 & 6 & 3 \\ 20 & 3 & 10 & 4 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{R-OP ROW COL}
 \end{array}$$

La flecha que hay al lado del nombre de la matriz indica que hay más columnas

RESOLUCIÓN apartado b:

$$\begin{array}{c}
 \text{PTAS / Unidad} \\
 \text{Naranjas} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 \text{Melocotón} \\
 M = \text{Manzanas} \\
 \text{Plátanos} \\
 \text{Limones}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 M \quad \begin{matrix} \leftarrow 1 \end{matrix} \\
 \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 \text{R-OP ROW COL}
 \end{array}$$

**RESOLUCIÓN apartado c:**

						PTAS / Unidad			
Nar	Mel	Man	Pla	Li		Naranjas	(10)	PTAS	
A	(12	5	20	6	3)	Melocotón	20	A	(431)
B	(20	3	10	4	0)	Manzanas	8	B	(364)
C	(10	10	0	12	0)	Platanos	6	C	(372)
						Limones	(5)		

COMENTARIO Y ANÁLISIS: La persona A gasta en fruta un total de 431 PTAS, la B, 364 PTAS y la C, 372 PTAS.



RESOLUCIÓN:

Mat P×Mat M	Ans 1 1 431 2 364 3 372
Mat M×L Det Trn AxB	431 Mat M×L Det Trn AxB



RESOLUCIÓN apartado d:

						PTAS	EUROS
1	A	(431)	=	A	(2.59)		
166.386	B	(364)	=	B	(2.19)		
	C	(372)	=	C	(2.24)		



RESOLUCIÓN:

1/166.386×Mat Ans	Ans 1 1 2.5906 2 2.1876 3 2.2357
Mat M×L Det Trn AxB	2.59036217 Mat M×L Det Trn AxB



RESOLUCIÓN apartado e:

						Nar	Mel	Man	Pla	Li		Nar	Mel	Man	Pla	Lim	
7P = 7 ·	A	12	5	20	6	3	=	A	84	35	140	42	21				
	B	20	3	10	4	0	=	B	140	21	70	28	0				
	C	10	10	0	12	0	=	C	70	70	0	84	0				



RESOLUCIÓN:

Ans 1 2 3 4 5	1 84 35 140 42	2 21
2 140 21 70 28	2 21 70 28 0	3 0
3 70 70 0 84	3 70 0 84 0	21
84	21	
Mat M×L Det Trn AxB	Mat M×L Det Trn AxB	

059

Una fábrica de coches produce utilitarios, descapotables, deportivos y furgonetas. En estos momentos en la región hay 3 concesionarios: Oviedo, Gijón y Avilés. En un determinado momento en Oviedo hay 10 utilitarios, 2 descapotables, 3 deportivos y 5 furgonetas. En Gijón, respectivamente, 2, 4, 5 y 16; y en Avilés, también respectivamente, 23, 2, 6 y 13.

Los descapotables tienen un precio de 3 millones, los deportivos de 4 millones, las furgonetas de 2 millones y los utilitarios de 1 millón.

(a) Dispón estos datos organizadamente en forma de matriz.

(b) Señala el significado del elemento a_{23} en ambas matrices.

(c) ¿Cuáles serán los ingresos totales obtenidos por la venta de los coches en cada concesionario?. Analiza y comenta los resultados.

BH2



RESOLUCIÓN apartado a:



Concesionarios				millones PTAS			
	Ov	Gi	Av				
Utilitarios	10	2	23	Utilitarios	1		
Descapotables	2	4	2	Descapotables	3		
Deportivos	3	5	6	Deportivos	4		
Furgonetas	5	16	13	Furgonetas	2		
Dimensión: 4 x 3				Dimensión: 4 x 1			



RESOLUCIÓN:

A	1	2	3	
1	10	2	23	
2	2	4	2	
3	3	5	6	
4	5	16	13	
R-OP ROW COL				13

B	1	
1	1	
2	3	
3	4	
4	2	
R-OP ROW COL		2



RESOLUCIÓN apartado b:

Significa que en el concesionario de Avilés hay 2 coches descapotables. En la matriz B no existe el elemento a_{23} .



RESOLUCIÓN apartado c:

Para averiguarlo habría que efectuar el producto, por lo que hay que modificar las dimensiones y colocarlas como sigue:



	U_t	Des	Dep	Fur		millones PTAS
<i>Oviedo</i>	10	2	3	5	<i>Utilitarios</i>	$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$
<i>Gijón</i>	2	4	5	16	<i>Descapotables</i>	$\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$
<i>Avilés</i>	23	2	6	13	<i>Deportivos</i>	$\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}$
					<i>Furgonetas</i>	$\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$

millones PTAS	Trn Mat A×Mat B	Ans
Oviedo (38)		1 38
Gijón (66)		2 66
Avilés (79)		3 79
Mat M+L Det Trn AxB		38

COMENTARIO Y ANÁLISIS:

Suponiendo que se venden todos los vehículos, en el concesionario de Oviedo se vendieron 38 millones de pesetas, en el de Gijón, 66 millones de pesetas y en el de Avilés, 79 millones de pesetas.

060	Un IES tiene que hacer un pedido de bolígrafos, libros, hojas para fotocopidora y transparencias. Para ello tiene tres proveedores: Almacenes Pérez, Gráficas Z y El Avilesino. Les pide precios por unidad de lo que necesitan y les dan los siguientes: Almacenes Pérez les cobra 2.35 € por cada bolígrafo, 5.56 € por libro, 4.69 € por el paquete de hojas y 15.75 € por las cajas de transparencias. Gráficas Z, 2.95, 4.50, 5 y 18 €, mientras que El avilesino, 3.25, 4.70, 4 y 13 €, respectivamente. Si el pedido consta de 120 bolígrafos, 100 libros, 250 paquetes de hojas y 25 cajas de transparencias: (a) Dispón organizadamente estos datos mediante matrices. (b) Señala el elemento a_{13} de cada matriz e interprétalo. (c) Calcula matricialmente cuál será el presupuesto total que presenta cada almacén al instituto. (d) Si tienes que pagar un 6% de IVA. Calcula matricialmente cuál será el presupuesto final que ofrece cada proveedor. (e) Comenta los resultados y sugiere cuál será el proveedor más adecuado.	BH2
-----	--	-----

RESOLUCIÓN apartado a:

	Bol	libr	hoj	transp.		Bol.	(120)
Almacenes Pérez	2.35	5.56	4.69	15.75		Libros	100
Gráficas Z	2.95	4.50	5	18		Hojas	250
El Avilesino	3.25	4.70	4	13		Transp.	(25)

RESOLUCIÓN apartado b:

En la 1ª matriz el elemento a_{13} significa que Almacenes Pérez vende cada paquete de hojas para fotocopidora a 4.69 €.

En la 2ª matriz no existe el elemento a_{13}

RESOLUCIÓN apartado c:

$$\begin{matrix} \text{Almacenes Pérez} \\ \text{Gráficas Z} \\ \text{El Avilesino} \end{matrix} \begin{pmatrix} 2.35 & 5.56 & 4.69 & 15.75 \\ 2.95 & 4.50 & 5 & 18 \\ 3.25 & 4.70 & 4 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{Bol.} \\ \text{Libros} \\ \text{Hojas} \\ \text{Transp.} \end{matrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \\ 250 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2404.25 \\ 2504 \\ 2185 \end{pmatrix}$$

--	--	--

RESOLUCIÓN apartado c:

$$\frac{106}{100} \cdot \begin{pmatrix} 2404.25 \\ 2504 \\ 2185 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2548.51 \\ 2654.24 \\ 2316.10 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN apartado b:

Si realizamos el pedido a Almacenes Pérez tendremos que pagar 2548.51 €, si es a Gráficas Z ascenderá a 2654.24 € y si es al Avilesino será de 2316.10 €, por lo que el más adecuado sería el tercero (El Avilesino) ya que es el que nos sale más barato.

061 	Un examen consta de tres pruebas. Cada una de ellas se califica con una puntuación de 0 a 10. No obstante, debido a su diferente nivel de dificultad, cada prueba tiene una ponderación distinta a la hora de determinar la calificación global del examen. Las ponderaciones son 0.25 para la prueba 1; 0.35 para la prueba 2 y 0.4 para la prueba 3. La calificación global se calcula multiplicando la puntuación obtenida en cada prueba por la correspondiente ponderación y sumando estos resultados. Obtener, utilizando el cálculo matricial, la calificación global de 3 alumnos, si han sacado las puntuaciones siguientes	BH2
----------------	--	-----

Alumno/prueba	1ª	2ª	3ª
Juan	3	3	8
María	6	6	3
Pablo	8	7	9

RESOLUCIÓN:

NOTA: Como se puede apreciar ésta es una actividad muy típica de la vida cotidiana de un estudiante, al que se le aplican diferentes ponderaciones en las notas obtenidas en distintos tipos de pruebas para obtener la calificación final, donde realmente lo que interesa es entender lo que estamos haciendo y cómo lo tenemos que hacer:

$$\begin{matrix} \text{Juan} \\ \text{María} \\ \text{Pablo} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 6 & 6 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \text{PTOS} \\ 1(0.25) \\ 2(0.35) \\ 3(0.4) \end{matrix} =$$



PTOS

Juan $\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$
 María $\begin{pmatrix} 4.8 \end{pmatrix}$
 Pablo $\begin{pmatrix} 8.05 \end{pmatrix}$

--	--	--	--

COMENTARIO Y ANÁLISIS:

La nota final de Juan será de 5 puntos, la de María 4.8 puntos y la de Pablo 8.05 puntos.

PROBLEMAS PROPUESTOS

062 Tres escritores presentan a un editor, al acabar una enciclopedia, la minuta siguiente:



	Horas de trabajo	Conferencias dadas	Viajes realizados
Escritor A	40	10	5
Escritor B	80	15	8
Escritor C	100	25	10

El editor paga la hora de trabajo a 45 €, la conferencia a 20 € y el viaje a 30 €. Si sólo piensa pagar, respectivamente, el 30 %, el 20% y el 10% de lo que le correspondería a cada escritor, ¿qué gasto tendría el editor?

063

Tres supermercados X, Y y Z se disputan los clientes de una ciudad. Inicialmente cada uno tiene una cuota de mercado igual a la tercera parte de los consumidores. Como consecuencia de una campaña publicitaria, un mes después se constata que:

- X conserva el 80% de sus clientes, gana el 10% de los de Y y el 2% de los de Z.
- Y conserva el 70% de sus clientes, gana el 14% de los de X y el 8% de los de Z.
- Z conserva el 90% de sus clientes, gana el 6% de los de X y el 20% de los de Y.

A partir de estos datos:

- Escribe matricialmente los cambios producidos en los porcentajes. ¿Qué propiedad tiene la matriz?
- Usa la matriz anterior para calcular la cuota de mercado que tiene cada supermercado después de la campaña

**064**

Una empresa fabrica tres tipos de artículos: A, B y C. Los precios de coste de cada unidad son 3.6 €, 5.52 € y 8.58 € respectivamente, mientras que los correspondientes precios de venta son 10.8 €, 16,8 € y 24 €. El número de unidades vendidas anualmente es de 2240, 1625 y 842, respectivamente. Sabiendo que las matrices de costes e ingresos, C e I son diagonales y que la matriz de ventas, V, es una matriz fila:

- Determina las matrices C, I y V
- Obtén, a partir de las matrices anteriores, la matriz de ingresos anuales correspondientes a los tres artículos, la matriz de gastos anuales y la matriz de beneficios anuales

**065**

Un hipermercado quiere ofertar tres clases de bandejas: A, B y C. La bandeja A contiene 40 g de queso Manchego, 160 g de Roquefort y 80 g de Camembert; la bandeja B contiene 120 g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores; y la bandeja C, contiene 150 g de queso Manchego, 80 g de Roquefort y 80 g de Camembert.

Si se quiere sacar a la venta 50 bandejas del tipo A, 80 de B y 100 de C, obtén matricialmente la cantidad que necesitarán, en kilogramos, de cada una de las tres clases de quesos.



066	Los consumos anuales de agua mineral, pan y leche de tres familias vienen expresados en la matriz A: $A = \begin{matrix} & \begin{matrix} Pan & Agua & Leche \end{matrix} \\ \begin{matrix} F1 \\ F2 \\ F3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix} \end{matrix}$ La evolución de los precios de los años 1995 a 1998 viene reflejada en la matriz B: $B = \begin{matrix} & \begin{matrix} pan & Agua & Leche \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1995 & 1996 & 1997 & 1998 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} \end{matrix}$ (a) Halla, si es posible, $A \cdot B$ y $B \cdot A$ e indica qué información proporciona el producto matricial. (b) ¿Qué información nos da el elemento c_{34} de la matriz producto?	BH2 
067	Una fábrica decide distribuir tres productos alimenticios A, B y C a cuatro países de África P1, P2, P3 y P4, según se describe en la matriz M1 (cantidades en toneladas): $M1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} P1 \\ P2 \\ P3 \\ P4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 150 & 150 \end{pmatrix} \end{matrix}$ Esta fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas para el transporte de los productos a los países de destino como indica la matriz M2 (en euros por tonelada): $M2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} P1 & P2 & P3 & P4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E1 \\ E2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{pmatrix} \end{matrix}$ Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones: (a) ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto? (b) ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa E2? (c) Indica qué elementos de la matriz producto nos permiten decir cuál es la empresa que más barato transporta el producto B a todos los países	BH2 
068	Tres personas, A, B, C, quieren comprar las siguientes cantidades de fruta: A: 2 kg de peras, 1 kg de manzanas y 6 kg de naranjas. B: 2 kg de peras, 2 kg de manzanas y 4 kg de naranjas. C: 1 kg de peras, 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas. En el pueblo en el que viven hay dos fruterías, F1 y F2. En F1 las peras cuestan 1.50 €/kg, las manzanas 1.00 €/kg y las naranjas 2.00 €/kg. En F2 las peras cuestan 1.80 €/kg, las manzanas 0.80 €/kg y las naranjas 2.00 €/kg. (a) Expresa matricialmente la cantidad de fruta (peras, manzanas y naranjas) que quiere comprar cada persona (A, B y C). (b) Escribe una matriz con los precios de cada tipo de fruta en cada una de las dos fruterías. (c) Obtén una matriz, a partir de las dos anteriores, en la que quede reflejado lo que se gastaría cada persona haciendo su compra en cada una de las dos fruterías.	BH2 
069	Un grupo de albañiles trabajan simultáneamente en la construcción de tres edificios. Para el primero de ellos necesitan diariamente 1000 kg de cemento, 2350 ladrillos y 440 baldosines; para el segundo necesitan cada día 800 kg de cemento, 1900 ladrillos y 380 baldosines; para el tercer edificio, las necesidades diarias son 2500 kg de cemento, 3000 ladrillos y 620 baldosines. Suponiendo que la duración de cada obra se espera que sea de 80, 60 y 120 días, respectivamente, se pide expresar matricialmente y calcular las cantidades totales de cada uno de los materiales empleados en los edificios.	BH2 



070	Tres familias, A, B, y C, van a ir de vacaciones a una ciudad en la que hay tres hoteles, H1, H2 y H3. La familia A necesita dos habitaciones dobles y una sencilla; la familia B necesita tres habitaciones dobles y una sencilla; la familia C necesita una habitación doble y dos sencillas. En el hotel H1 el precio de la habitación doble es de 84 €/día y el de la habitación sencilla es de 45 €/día. En el hotel H2 el precio de la habitación doble es de 86 €/día y el de la habitación sencilla es de 43 €/día. En el hotel H3 el precio de la habitación doble es de 85 €/día y el de la habitación sencilla es de 44 €/día. (a) Escribe en forma de matriz el número de habitaciones (dobles o sencillas) que necesita cada una de las tres familias. (b) Expresa matricialmente el precio de cada tipo de habitación en cada uno de los tres hoteles. (c) Obtén, a partir de las dos matrices anteriores, una matriz en la que se refleje el gasto diario que tendría cada una de las tres familias en cada uno de los tres hoteles.	BH2
-----	---	---------

071	En una pastelería elaboran tres tipos de postres: A, B y C, utilizando leche, huevos y azúcar (entre otros ingredientes) en las cantidades que se indican: A: 3/4 de litro de leche, 100 g de azúcar y 4 huevos. B: 3/4 de litro de leche, 112 g de azúcar y 7 huevos. C: 1 litro de leche y 200 g de azúcar. El precio al que se compran cada uno de los tres ingredientes es de 0.6 euros el litro de leche, 1 euro el kg de azúcar, y 1.2 euros la docena de huevos. Obtén matricialmente el gasto que supone cada uno de estos tres postres (teniendo en cuenta solamente los tres ingredientes indicados).	BH2
-----	---	---------

072	En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos A, B, y C, que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesaria para fabricar una unidad de producto:	BH2
-----	--	---------

	Producto		
Material	A	B	C
Chatarra	8	6	6
Carbón	6	6	4
Aleaciones	2	1	3

Obtén una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de A, 4 de B y 3 de C.

073	En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes: Lote A: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo. Lote B: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos. Lote C: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos. Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1.5 euros y cada bolígrafo 0.24 €. (a) Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote. (b) Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes A, B y C.	BH2
-----	---	---------

074	Una empresa produce tres bienes A, B, y C. Tiene tres factorías y, cada una de ellas, produce los tres bienes en las cantidades por hora siguientes:	BH2
-----	---	---------

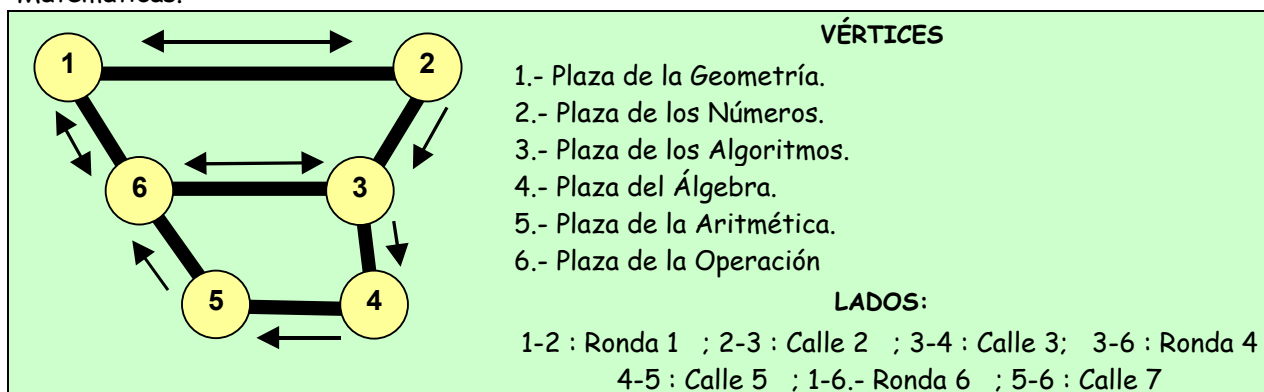
	Factoría 1	Factoría 2	Factoría 3
A	10 unidades/hora	20 unidades/hora	15 unidades/hora
B	25 unidades/hora	25 unidades/hora	20 unidades/hora
C	30 unidades/hora	25 unidades/hora	25 unidades/hora

En la Factoría 1 se trabajan 8 horas diarias, la Factoría 2 funciona las 24 horas del día y en la Factoría 3 se trabajan 10 horas diarias. (a) Calcula matricialmente el número de unidades diarias de los bienes A, B y C que fabrica la empresa. (b) Si se trabaja durante 22 días cada mes, obtén matricialmente la proporción mensual de la empresa en cada uno de los bienes A, B y C.
--

OTRAS APLICACIONES: GRAFOS EN FORMA DE MATRIZ

EJEMPLO 1

En el siguiente plano aparecen las direcciones de tráfico que une 6 plazas típicas de la ciudad de Matemáticas.



Coloca este grafo en forma de matriz informativa.

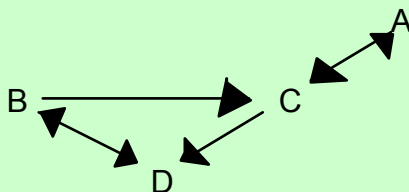
RESOLUCIÓN:

Es posible pasar del grafo a la matriz de la forma siguiente:

La matriz tiene tantas filas como columnas, coincidiendo su número con el de vértices. Cuando dos vértices están conectados en un sentido, en la intersección de la fila cuyo número coincide con el vértice de partida, y la columna cuyo número coincide con el vértice de llegada figurará un 1; si no existe tal conexión, figurará un 0. Así, en nuestro caso, la matriz asociada será:

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA: Si en todas las filas y las columnas hay un 1 indica que el tráfico es posible en ese entramado de calles.

EJEMPLO 2

Se consideran 4 pueblos A, B, C y D unidos por carreteras según el grafo anterior:

(a) Se pide construir la matriz T que indique el número de distintas formas de ir directamente de un pueblo a otro.

(b) Analiza el significado de T^2

(c) Analiza el significado de T^3

(d) Analiza el significado de $T + T^2 + T^3$

RESOLUCIÓN apartado A:

$$\begin{matrix} & A & B & C & D \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**RESOLUCIÓN apartado b:**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El elemento T_{ij}^2 es el número de caminos de longitud dos (o dicho de otra forma, el número de formas de ir del pueblo i al j en dos trayectos)

RESOLUCIÓN apartado c:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento $T_{23}^3 = 2$, eso quiere decir que hay dos posibilidades para ir del pueblo B al C en tres trayectos.

RESOLUCIÓN apartado d:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el elemento $M_{34} = 3$, eso quiere decir que hay tres posibilidades para ir del pueblo C al D en recorridos de uno dos o tres trayectos.

EJEMPLO 3**El problema de los misioneros y los caníbales**

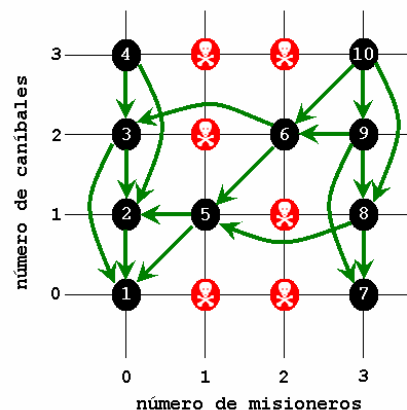
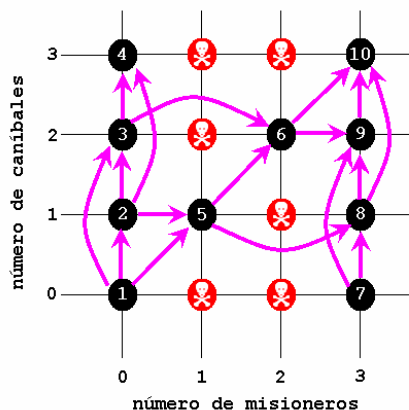
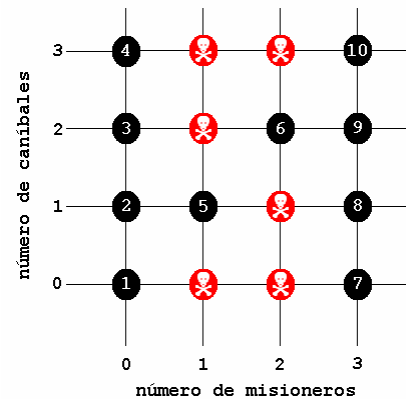
Tres misioneros y tres caníbales están en una de las márgenes de un río, junto a una lancha en la que sólo caben una o dos personas. Hay que encontrar la manera de pasarlos a todos al otro lado del río, pero teniendo cuidado de que en ningún momento el número de misioneros sea menor que el número de caníbales en cualquiera de las orillas. Vamos a calcular el número mínimo de movimientos requerido para transportar las seis personas a la otra orilla; para ello utilizaremos la teoría de matrices y la teoría de grafos.

Podemos fijarnos en las personas que hay en la orilla de destino y comprobar que existen sólo diez posibles estados. Por ejemplo, en el estado ⑤ hay dos caníbales y ningún misionero en la orilla de destino; por supuesto en la orilla de salida habrá un caníbal y tres misioneros. Los estados marcados con el símbolo ☠ dan lugar a la muerte de los misioneros en una u otra orilla por superioridad del número de caníbales.

Vamos a conectar estos diferentes estados con los transvases que la barca permite. Hay cinco posibles movimiento de personal:

- que la barca lleve un caníbal hacia la orilla de destino.
- que la barca lleve dos caníbales hacia la orilla de destino.
- que la barca lleve un misionero hacia la orilla de destino
- que la barca lleve dos misioneros hacia la orilla de destino.
- que la barca lleve un misionero y un caníbal hacia la orilla de destino.

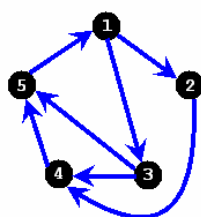
La barca ha de volver hacia la orilla de salida y los movimientos posibles son similares pero hacia la orilla de salida. Vamos a ver nuestro problema como un grafo de diez vértices (estados) cuyas aristas son los posibles transvases de personal cuando la barca va y vuelve.



Los grafos anteriores quieren decir que si estamos en el estado ⑤ podemos alcanzar los estados ⑥ y ⑧ si la barca está yendo hacia la orilla de destino (movimiento impar) o los estados ② y ① si la barca regresa a la orilla de salida (movimiento par).

Nuestro objetivo es partiendo del estado inicial ① alcanzar el estado final ⑩, haciendo un mínimo de movimientos alternativamente de una orilla a otra. Para ello vamos a utilizar herramientas de la teoría de grafos como es la matriz de adyacencia.

La matriz de adyacencia de un grafo es aquella cuyo elemento de la fila i y la columna j es uno si el vértice i es el extremo inicial de una flecha y el vértice j es el extremo final; el elemento es cero en caso contrario. La matriz de adyacencia siempre es cuadrada y su orden es el número de vértices del grafo. Por ejemplo:



$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

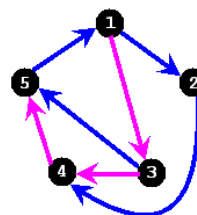
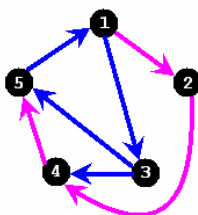
La ventaja de una matriz de adyacencia es que sus potencias nos permiten conocer el número de caminos que unen dos vértices después de varios movimientos. Esto es, el elemento de la potencia k



ésima que ocupa la fila i y la columna j indican el número de caminos que unen los vértices i y j en k movimientos.

Por ejemplo en la matriz G^3 , que el elemento de la primera fila y la quinta columna sea 2, significa que hay dos caminos que unen el vértice primero y el quinto en tres movimientos

$$G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Particularizando para nuestro problema tenemos un grafo con diez vértices, por consiguiente la matriz de adyacencia es una matriz cuadrada de orden diez. Es aquí cuando es conveniente utilizar el apoyo de una calculadora gráfica o de un asistente matemático porque no es agradable trabajar con matrices de orden tan grande y mucho menos hacer varias operaciones con ella, con el riesgo que existe de cometer algún error.

Utilizaremos la calculadora gráfica CASIO fx-9860G SD. Vamos a construir la matriz de adyacencia para el grafo de movimientos impares:

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

La matriz de adyacencia para el grafo de movimientos pares es la matriz transpuesta, que se obtiene sencillamente con:

Trn Mat A→Mat B

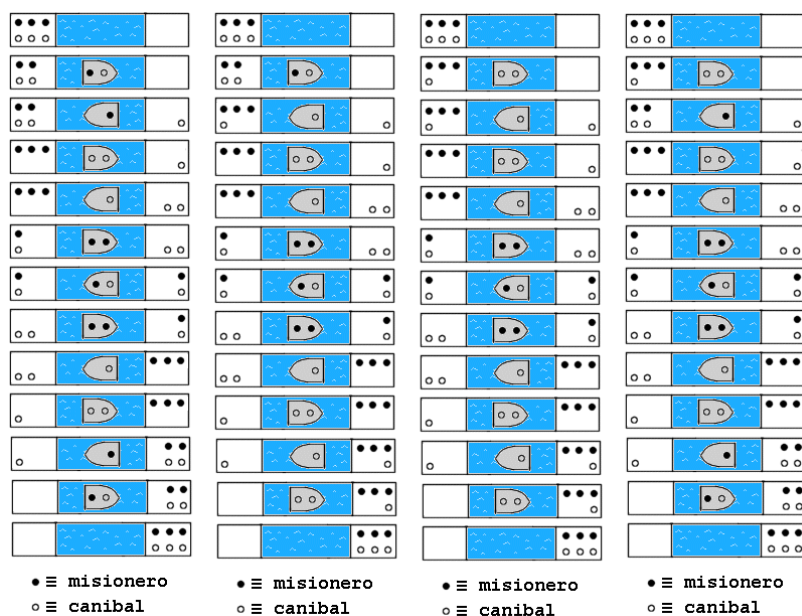
B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
9	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
10	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0

Nuestro caso es un poco más complicado porque la matriz de adyacencia alterna con los movimientos. Calcularemos las matrices A , $A \cdot B$, $A \cdot B \cdot A$, $A \cdot B \cdot A \cdot B$, ..., correspondientes a uno, dos, tres, cuatro, ..., movimientos hasta que encontremos un producto en el que el elemento de la fila uno y la columna diez sea distinto de cero.

Esto ocurre en el producto $A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B \cdot A$, dicho elemento vale cuatro; dicho de otro modo, después de once movimientos existen cuatro formas de unir el estado 1 y el estado 10:

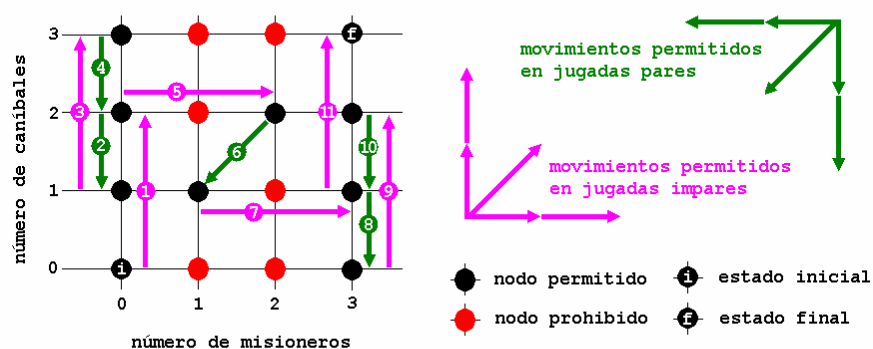
AMS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1619	3353	2284	3353	690	0	164	28	4
2	0	1734	3628	2556	3628	879	0	277	86	28
3	0	550	1212	1011	1212	574	0	360	277	164
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	140	357	442	357	492	0	574	879	690
6	0	2	15	84	15	357	0	1212	3628	3353
7	0	24	84	195	84	442	0	1011	2556	2284
8	0	2	15	84	15	357	0	1212	3628	3353
9	0	0	2	24	2	140	0	550	1734	1619
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Hemos demostrado que existen cuatro soluciones que mostramos esquemáticamente en el dibujo siguiente, la obtención a través de la teoría de grafos sería un poco más difícil:



Aunque es posible conseguirlo por el método de prueba y error:

GRAFO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE LOS MISIONEROS Y LOS CANÍBALES





PROPUESTAS DE ACTIVIDADES INDAGATORIAS TIPO TEST

NOTA: Se puede utilizar como herramienta auxiliar cualquier tipo de calculadora.

1. La matriz traspuesta de la matriz traspuesta de A (A^t)^t es:

- ☐ A^t
- ☐ A
- ☐ A^{-1}
- ☐ I
- ☐ No existe

2. La traspuesta de la suma de matrices $(A + B)^t$ es:

- ☐ $A^t + B^t$
- ☐ $A^t - B^t$
- ☐ $(A + B)^{-1}$
- ☐ $A^{-1} + B^{-1}$
- ☐ 0

3. Una matriz es simétrica cuando es igual a:

- ☐ Su matriz inversa
- ☐ Su matriz traspuesta
- ☐ Su matriz identidad
- ☐ Su matriz triangular superior
- ☐ Su matriz triangular inferior

4. Una matriz es antisimétrica cuando es igual a:

- ☐ La matriz traspuesta de la traspuesta
- ☐ La opuesta de la matriz identidad
- ☐ La opuesta de su traspuesta
- ☐ La opuesta de su matriz
- ☐ La matriz multiplicada por su traspuesta

5. El producto de dos matrices no nulas A y B puede ser nulo:

- ☐ Sólo si $A = 0$ o $B = 0$
- ☐ Sí
- ☐ Nunca
- ☐ Sólo si son matrices cuadradas.
- ☐ Sólo si son opuestas.

6. Una matriz idempotente es:

- ☐ Una matriz diagonal
- ☐ Una matriz identidad
- ☐ Aquella matriz que es igual a sus potencias
- ☐ Aquella matriz que es igual a su inversa
- ☐ Aquella matriz que es igual a su traspuesta

7. El producto $(A \cdot B)^t$ es:

- ☐ $A^t \cdot B^t$
- ☐ $(B \cdot A)^t$
- ☐ $B^t \cdot A^t$
- ☐ $A^t \cdot B$
- ☐ $B^t \cdot A$

8. La inversa de la suma de dos matrices cuadradas es:

- ☐ $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$
- ☐ $(A + B)^{-1} = A^{-1} \cdot B$
- ☐ $(A + B)^{-1} = A + B^{-1}$
- ☐ $(A + B)^{-1} = I$
- ☐ No puede saberse

9. El producto de una matriz por su inversa es:

- ☐ $A \cdot A^{-1} = I$
- ☐ $A \cdot A^{-1} = A$
- ☐ $A \cdot A^{-1} = A^{-1}$
- ☐ $A \cdot A^{-1} = (A \cdot A)^{-1}$
- ☐ No puede hacerse, porque no existe la división de matrices

10. El rango de una matriz es:

- ☐ El número de filas distintas
- ☐ El número de columnas distintas
- ☐ El número de líneas linealmente independientes
- ☐ El número de elementos no nulos
- ☐ El número de elementos diagonales no nulos

11. La traspuesta de una matriz simétrica es igual a:

- ☐ La matriz original
- ☐ La traspuesta de la matriz identidad
- ☐ La traspuesta de una matriz escalar
- ☐ La inversa de la simétrica de la traspuesta multiplicada por el escalar $n-1$
- ☐ La traspuesta de una matriz nula

12. Al sumar a una matriz su opuesta:

- ☐ Obtenemos la matriz nula
- ☐ Obtenemos la matriz identidad
- ☐ Obtenemos una matriz simétrica
- ☐ Obtenemos una matriz antisimétrica
- ☐ Obtenemos una matriz cuadrada

13. La matriz formada por los elementos

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0.5, a_{21} = 0.5, a_{22} = 1$$

- ☐ Es diagonal
- ☐ Es simétrica
- ☐ Es antisimétrica
- ☐ Es escalar
- ☐ Es idempotente

14. Al escribir a_{ij} estamos indicando:

- ☐ El elemento que ocupa la fila i y la columna j
- ☐ El elemento que ocupa la columna i y la fila j
- ☐ El elemento de la matriz i que ocupa la fila y columna j
- ☐ El elemento de la matriz j que ocupa la fila y columna i
- ☐ El elemento de la matriz A que ocupa la fila i y la columna j

15. Al escribir a_{ji} estamos indicando:

- ☐ El elemento que ocupa la fila i y la columna j
- ☐ El elemento que ocupa la columna i y la fila j
- ☐ El elemento de la matriz i que ocupa la fila y columna j
- ☐ El elemento de la matriz j que ocupa la fila y columna i
- ☐ Nada, porque siempre es a_{ij}

16. Una matriz es cuadrada:

- ☐ Si sus elementos son cuadrados perfectos (1, 4, 9, ...)
- ☐ Si tiene el mismo número de elementos diagonales que no diagonales
- ☐ Si tiene el mismo número de filas que de columnas
- ☐ Si tiene matriz inversa
- ☐ Si puede multiplicarse por la matriz identidad

17. Dos matrices son iguales cuando:

- ☐ Tienen la misma dimensión y los elementos diagonales son iguales
- ☐ Tienen la misma dimensión y los elementos no diagonales son iguales
- ☐ Tienen la misma dimensión y los elementos correspondientes son iguales
- ☐ Una es la traspuesta de la otra
- ☐ Al sumarlas sale la matriz identidad

18. Al multiplicar por la matriz nula:

- ☐ La matriz no varía
- ☐ Vuelve a aparecer la matriz nula
- ☐ Aparece la matriz identidad
- ☐ La matriz se vuelve antisimétrica
- ☐ La matriz nula no puede multiplicarse por ninguna matriz

19. Una matriz fila:

- ☐ Tiene sus elementos dispuestos verticalmente
- ☐ Tiene sus elementos dispuestos horizontalmente
- ☐ Sólo tiene un elemento por fila
- ☐ Sólo tiene un elemento diagonal
- ☐ Puede multiplicarse por sí misma

20. Una matriz columna:

- ☐ Tiene sus elementos dispuestos verticalmente
- ☐ Tiene sus elementos dispuestos horizontalmente
- ☐ Sólo tiene un elemento por columna
- ☐ Sólo tiene un elemento diagonal
- ☐ Puede multiplicarse por sí misma

21. Una matriz diagonal:

- ☐ Sólo tiene elementos diagonales
- ☐ Sólo tiene ceros en su diagonal principal
- ☐ Tiene nulos todos sus elementos no diagonales
- ☐ Tiene nulos todos sus elementos diagonales
- ☐ Tiene iguales todos sus elementos diagonales

22. Una matriz escalar:

- ☐ Sólo tiene elementos diagonales
- ☐ Sólo tiene ceros en su diagonal principal
- ☐ Tiene nulos todos sus elementos no diagonales
- ☐ Tiene nulos todos sus elementos diagonales
- ☐ Tiene iguales todos sus elementos diagonales y nulos los no diagonales

23. Si una matriz tiene tres filas y cuatro columnas:

- ☐ Su dimensión es (3 x 4)
- ☐ Su dimensión es (4 x 3)
- ☐ No puede ser que tenga distinto número de filas que de columnas
- ☐ Tiene doce elementos distintos
- ☐ Tiene doce elementos iguales

24. Al sumar la matriz nula:

- ☐ La matriz no varía
- ☐ Vuelve a aparecer la matriz nula
- ☐ Aparece la matriz identidad
- ☐ La matriz se vuelve simétrica
- ☐ La matriz nula no puede sumarse a ninguna matriz



25. Al multiplicar por la matriz identidad:

- ☐ La matriz no varía
- ☐ Vuelve a aparecer la matriz identidad
- ☐ Aparece la matriz nula
- ☐ La matriz se vuelve rectangular
- ☐ La matriz se vuelve cuadrada

26. En una matriz triangular superior:

- ☐ Los elementos por encima de la diagonal principal son ceros
- ☐ Los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros
- ☐ Los elementos por encima de la diagonal secundaria son ceros
- ☐ Los elementos por debajo de la diagonal secundaria son ceros
- ☐ Los elementos de la diagonal y superiores son ceros

27. En una matriz triangular inferior:

- ☐ Los elementos por encima de la diagonal principal son ceros
- ☐ Los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros
- ☐ Los elementos por encima de la diagonal secundaria son ceros
- ☐ Los elementos por debajo de la diagonal secundaria son ceros
- ☐ Los elementos de la diagonal y superiores son ceros

28. Al sumar a una matriz su traspuesta

- ☐ Nunca pueden sumarse una matriz y su traspuesta
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos la matriz identidad
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos una matriz simétrica
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos una matriz antisimétrica
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos la matriz nula

29. Si dos matrices pueden multiplicarse

- ☐ Es porque son iguales
- ☐ Es porque tienen la misma dimensión
- ☐ Es porque el número de filas de la primera coincide con el número de columnas de la segunda
- ☐ Es porque el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda
- ☐ Es porque son cuadradas

30. Al restar a una matriz su opuesta:

- ☐ Obtenemos la matriz nula
- ☐ Obtenemos la matriz identidad
- ☐ Obtenemos una matriz simétrica
- ☐ Obtenemos una matriz antisimétrica
- ☐ Obtenemos la matriz inicial multiplicada por dos

31. Al restar a una matriz su traspuesta:

- ☐ Nunca pueden restarse una matriz y su traspuesta
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos la matriz identidad
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos una matriz simétrica
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos una matriz antisimétrica
- ☐ Cuando se puede efectuar la operación, obtenemos la matriz nula

32. Al multiplicar una matriz por su traspuesta:

- ☐ Nunca pueden multiplicarse una matriz y su traspuesta
- ☐ Obtenemos una matriz cuadrada
- ☐ Obtenemos la matriz identidad
- ☐ Obtenemos una matriz simétrica
- ☐ Obtenemos una matriz antisimétrica

33. Si dos matrices pueden sumarse:

- ☐ Es porque son iguales
- ☐ Es porque tienen la misma dimensión
- ☐ Es porque el número de filas de la primera coincide con el número de columnas de la segunda
- ☐ Es porque el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda
- ☐ Es porque son cuadradas

34. Para multiplicar una matriz por un número real:

- ☐ Se multiplica una fila o columna por ese número real
- ☐ Se multiplican todos los elementos por ese número real
- ☐ Se multiplica una fila y una columna por ese número real
- ☐ No puede multiplicarse un real por una matriz, porque no tiene filas ni columnas
- ☐ Debemos ayudarnos de la matriz identidad

35. La matriz nula:

- ☐ Es el elemento neutro de la suma
- ☐ Es el elemento neutro del producto
- ☐ Es el elemento simétrico de la suma
- ☐ Es el elemento simétrico del producto
- ☐ No tiene ningún interés más allá del de resolver problemas

36. La matriz identidad:

- ☐ Es el elemento neutro de la suma
- ☐ Es el elemento neutro del producto
- ☐ Es el elemento simétrico de la suma
- ☐ Es el elemento simétrico del producto
- ☐ No tiene ningún interés más allá del de resolver problemas

37. Una matriz tiene inversa si:

- ☐ También tiene traspuesta
- ☐ Es cuadrada y su rango coincide con su dimensión
- ☐ Es rectangular y su rango coincide con su dimensión
- ☐ Es rectangular y su rango coincide con el número de filas
- ☐ Es rectangular y su rango coincide con el número de columnas

38. Se define el rango como:

- ☐ El número de filas distintas de cero que obtenemos al triangular una matriz
- ☐ El número de líneas (filas o columnas) linealmente independientes
- ☐ El número de elementos diagonales no nulos
- ☐ La diferencia entre los el número de elementos diagonales positivos y negativos
- ☐ En matrices cuadradas, es su dimensión

39. Si al sumar dos matrices me sale la matriz nula:

- ☐ Es que una es la opuesta de la otra
- ☐ Es que ambas son la matriz nula
- ☐ Es que ambas son matrices diagonales
- ☐ Es que ambas son matrices escalares
- ☐ Ninguna de las anteriores es cierta

40. Si al multiplicar dos matrices me sale la matriz identidad:

- ☐ Es que una es la inversa de la otra
- ☐ Es que ambas son la matriz identidad
- ☐ Es que ambas son matrices diagonales
- ☐ Es que ambas son matrices escalares
- ☐ Ninguna de las anteriores es cierta

41. Si en una matriz una línea es combinación lineal de las otras:

- ☐ No pasa nada
- ☐ Esa matriz no puede sumarse a otras
- ☐ Esa matriz no puede multiplicarse con otras matrices, excepto la identidad
- ☐ La matriz no tiene inversa
- ☐ Al triangularla obtendré ceros

42. Una matriz rectangular:

- ☐ No puede tener matriz inversa
- ☐ Sí puede tener matriz inversa
- ☐ Tiene dos matrices inversas, una para multiplicar por la derecha y otra por la izquierda
- ☐ Sólo puede hallarse la matriz inversa mediante un sistema de ecuaciones
- ☐ Sólo tiene inversa si es triangular

43. Al descomponer una matriz M en suma de una matriz simétrica (S) y otra antisimétrica (A) obtenemos:

- ☐ $S = (M + M^t)/2$ y $A = (M - M^t)/2$
- ☐ $S = (M - M^t)/2$ y $A = (M + M^t)/2$
- ☐ $S = (M \cdot M^t)/2$ y $A = (M^t \cdot M)/2$
- ☐ $S = (M^t \cdot M)/2$ y $A = (M \cdot M^t)/2$
- ☐ Ninguna de las anteriores

44. La suma de dos matrices simétricas:

- ☐ Es otra matriz simétrica
- ☐ Es una matriz antisimétrica
- ☐ No es una matriz simétrica
- ☐ No es una matriz antisimétrica
- ☐ Es una matriz diagonal

45. Considera la siguiente expresión matricial: $6 \cdot A + 2 \cdot I = B$, donde B es una matriz cuadrada de orden 2 e I es la matriz identidad de orden correspondiente. La dimensión de la matriz A es:

- ☐ 2×2
- ☐ 3×3
- ☐ 3×2
- ☐ 2×3
- ☐ Faltan datos

46. Si $A \cdot B = A \cdot C$:

- ☐ Es porque A es la matriz identidad
- ☐ Es porque $B = C$
- ☐ Es porque B es la matriz identidad
- ☐ Es porque C es la matriz identidad
- ☐ Ninguna de las anteriores



Para las cuestiones 47 a 75 considerar que las matrices tienen las dimensiones adecuadas y son regulares (poseen inversa) cuando se necesita. X es la matriz incógnita

47. En la ecuación matricial $X + A = B$:

- ☐ $X = B - A$
- ☐ $X = A - B$
- ☐ $X = B + A$
- ☐ $X = A \cdot B$
- ☐ $X = B \cdot A$

48. En la ecuación matricial $X - A = B$:

- ☐ $X = B - A$
- ☐ $X = A - B$
- ☐ $X = B + A$
- ☐ $X = A \cdot B$
- ☐ $X = B \cdot A$

49. En la ecuación $2 \cdot X + A = B$:

- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot (B - A)$
- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot (A - B)$
- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot (A + B)$
- ☐ $X = A + \frac{1}{2} \cdot B$
- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot B - A$

50. En la ecuación $2 \cdot X + 2 \cdot A = B$:

- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot (B - 2 \cdot A)$
- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot A - B)$
- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot A - \frac{1}{2} \cdot B$
- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot B - A)$
- ☐ $X = \frac{1}{2} \cdot B - 2 \cdot A$

51. En la ecuación matricial $A \cdot X = B$:

- ☐ $X = B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- ☐ $X = B : A$
- ☐ $X = B - A$

52. En la ecuación matricial $X \cdot A = B$:

- ☐ $X = B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- ☐ $X = B : A$
- ☐ $X = B - A$

53. En la ecuación $X \cdot A + C = B$:

- ☐ $X = (B - C) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B - C)$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B - C)^{-1}$
- ☐ $X = (B - C) : A$
- ☐ $X = B - C - A$

54. En la ecuación $A \cdot X + C = B$:

- ☐ $X = (B - C) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B - C)$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B - C)^{-1}$
- ☐ $X = (B - C) : A$
- ☐ $X = B - C - A$

55. En la ecuación matricial $A \cdot X \cdot C = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot B$
- ☐ $X = B \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = (B : C) : A$

56. En la ecuación matricial $A \cdot X \cdot C = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot B$
- ☐ $X = B \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = (B : A) : C$

57. En la ecuación $A \cdot X \cdot C + D = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B - D) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B - D) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot (B - D)$
- ☐ $X = (B - D) \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = [(B - D) : C] : A$

58. En la ecuación $A \cdot X \cdot C - D = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B + D) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B + D) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot (B + D)$
- ☐ $X = (B + D) \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = [(B + D) : A] : C$

59. En la ecuación $A \cdot X \cdot C + D \cdot E = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B - D \cdot E) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B - D \cdot E) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot (B - D \cdot E)$
- ☐ $X = (B \cdot E^{-1} - D) \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = [(B : E - D) : C] : A$

60. En la ecuación $(A \cdot X \cdot C + D) \cdot E = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B \cdot E^{-1} + D) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B \cdot E^{-1} + D) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot (B + D) \cdot E^{-1}$
- ☐ $X = (B + D) \cdot E^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = [(B : E + D) : A] : C$

61. En la ecuación $(A \cdot X \cdot C - D) \cdot E = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B \cdot E^{-1} + D) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B \cdot E^{-1} + D) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot (B + D) \cdot E^{-1}$
- ☐ $X = (B + D) \cdot E^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = [(B : E + D) : A] : C$

62. En la ecuación $X \cdot A^{-1} = B$:

- ☐ $X = A \cdot B$
- ☐ $X = B \cdot A$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B$
- ☐ $X = B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = B : A^{-1}$

63. En la ecuación $A^{-1} \cdot X \cdot C = B$:

- ☐ $X = A \cdot B \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = C^{-1} \cdot B \cdot A$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = C^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = (B : C) : A^{-1}$

64. En la ecuación $A \cdot X \cdot C^{-1} = B$:

- ☐ $X = A^{-1} \cdot B \cdot C$
- ☐ $X = C \cdot B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A \cdot B \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = C^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = (B : C) : A^{-1}$

65. En la ecuación $A^{-1} \cdot X \cdot C^{-1} = B$:

- ☐ $X = A \cdot B \cdot C$
- ☐ $X = C \cdot B \cdot A$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = C^{-1} \cdot B \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = (B : C) : A^{-1}$

66. En la ecuación $A \cdot X^t \cdot C = B$:

- ☐ $X = (A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1})^t$
- ☐ $X = (C \cdot B \cdot A^{-1})^t$
- ☐ $X = (A^t)^{-1} \cdot B^t \cdot (C^t)^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = (B : C : A)^t$

67. En la ecuación $A^t \cdot X^t \cdot C^t = B$:

- ☐ $X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = C^{-1} \cdot B^t \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = (A^t)^{-1} \cdot B^t \cdot (C^t)^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot B^t \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = (B : C : A)^t$

68. En la ecuación $A^{-1} \cdot X \cdot C^{-1} + B = E$:

- ☐ $X = A \cdot (E - B) \cdot C$
- ☐ $X = C \cdot (B - E) \cdot A$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (E + B) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B + E) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = (B : C) : A^{-1}$

69. En la ecuación $(A \cdot X \cdot C - D) \cdot E = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B \cdot E^{-1} + D) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B \cdot E^{-1} + D) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot (B + D) \cdot E^{-1}$
- ☐ $X = (B + D) \cdot E^{-1} \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = [(B : E + D) : A] : C$

70. En la ecuación $(A \cdot X \cdot C - D) \cdot E^{-1} = B$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot (B \cdot E + D) \cdot A^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot (B \cdot E + D) \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = A^{-1} \cdot C^{-1} \cdot (B + D) \cdot E$
- ☐ $X = (B + D) \cdot E \cdot A^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = [(B \cdot E + D) : A] : C$

71. En la ecuación $A \cdot X \cdot A = I$:

- ☐ $X = I$
- ☐ $X = A^2$
- ☐ $X = (A^{-1})^2$
- ☐ $X = A^{-1}$
- ☐ $X = (I : A) : A$

72. En la ecuación $A \cdot X \cdot A = A$:

- ☐ $X = I$
- ☐ $X = A^2$
- ☐ $X = (A^{-1})^2$
- ☐ $X = A^{-1}$
- ☐ $X = I : A^2$

73. En la ecuación $A^{-1} \cdot X \cdot A = I$:

- ☐ $X = I$
- ☐ $X = A^2$
- ☐ $X = (A^{-1})^2$
- ☐ $X = A^{-1}$
- ☐ $X = (I : A) : A^{-1}$

74. En la ecuación $C \cdot (A + X) \cdot B = I$:

- ☐ $X = C^{-1} \cdot B^{-1} - A$
- ☐ $X = B^{-1} \cdot C^{-1} - A$
- ☐ $X = A - C^{-1} \cdot B^{-1}$
- ☐ $X = A - B^{-1} \cdot C^{-1}$
- ☐ $X = C^{-1} \cdot B^{-1} - A^{-1}$

75. En la ecuación $C \cdot (A^t + X^t) \cdot B = I$:

- ☐ $X = (C^{-1} \cdot B^{-1})^t - A$
- ☐ $X = (B^{-1} \cdot C^{-1})^t - A$
- ☐ $X = A - (C^{-1} \cdot B^{-1})^t$
- ☐ $X = A - (B^{-1} \cdot C^{-1})^t$
- ☐ $X = (C^{-1} \cdot B^{-1} - A)^t$

76. Una matriz de tres filas y tres columnas tiene rango tres. ¿Cómo varía el rango si quitamos una columna?

- ☐ Sigue teniendo rango tres, pues sigue teniendo tres filas linealmente independientes
- ☐ Tiene rango dos seguro, ya que las filas eran linealmente independientes
- ☐ Sólo podemos asegurar que el rango será menor que tres (1 ó 2)
- ☐ No puede decirse nada
- ☐ A una matriz no pueden quitársele columnas



77. Una matriz de tres filas y tres columnas tiene rango tres. ¿Cómo varía el rango si quitamos una fila y una columna?

- ☐ Tiene rango dos seguro, ya que las filas eran linealmente independientes
- ☐ Sólo podemos asegurar que el rango será menor que tres (1 ó 2)
- ☐ No puede decirse nada
- ☐ A una matriz no pueden eliminársele filas
- ☐ A una matriz no pueden quitársele columnas

78. Si A es una matriz ($m \times n$), B es una matriz ($p \times q$) y C es una matriz ($r \times s$) para que se pueda efectuar la operación $A \cdot B \cdot C$, debe cumplirse que:

- ☐ $n = q$ y $p = r$
- ☐ $m = n = p = q = r = s$
- ☐ $n = p$ y $q = r$
- ☐ $m = n, p = q$ y $r = s$
- ☐ $n = p, q = r$ y $m = s$

79. Si A es una matriz ($m \times n$), B es una matriz ($p \times q$) y C es una matriz ($r \times s$) para que se pueda efectuar la operación $A \cdot (B + C)$, debe cumplirse que:

- ☐ $n = q$ y $p = r$
- ☐ $m = n = p = q = r = s$
- ☐ $n = p = r$ y $q = s$
- ☐ $m = p = r$ y $n = q = s$
- ☐ $n = p, q = r$ y $m = s$

80. Considera una matriz cuadrada de orden tres cuyo rango es dos. Si a los elementos de una columna les sumo los correspondientes de otra de sus columnas:

- ☐ El rango no varía
- ☐ El rango aumenta
- ☐ El rango disminuye
- ☐ Depende de si la columna es todo ceros
- ☐ No puede saberse

81. Si A es una matriz tal que $A \cdot A = I$ entonces:

- ☐ $A = I$
- ☐ $A^t = A$
- ☐ $A^{-1} = A$
- ☐ $A^3 = I$
- ☐ Ninguna matriz cumple esa propiedad

82. Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- ☐ $M \cdot N^t$ es una matriz cuadrada de orden dos que tiene matriz inversa
- ☐ $M \cdot N^t$ es una matriz cuadrada de orden dos que no tiene matriz inversa
- ☐ $M \cdot N^t$ es una matriz cuadrada de orden tres que tiene matriz inversa
- ☐ $M \cdot N^t$ es una matriz cuadrada de orden tres que no tiene matriz inversa
- ☐ $M \cdot N^t$ no puede calcularse

83. Si se cumple que $A \cdot B = A$ y $B \cdot A = B$ entonces:

- ☐ $A = I$
- ☐ $B = I$
- ☐ $A = B$
- ☐ $A^2 = A$ y $B^2 = B$
- ☐ $A = B = I$

84. Sea A una matriz de dimensión ($m \times n$) con la que efectuamos la operación $A \cdot B \cdot A = C$. Entonces:

- ☐ B tiene dimensión ($m \times m$) y C ($n \times n$)
- ☐ B tiene dimensión ($m \times n$) y C ($n \times m$)
- ☐ B tiene dimensión ($n \times n$) y C ($m \times m$)
- ☐ B tiene dimensión ($n \times m$) y C ($m \times n$)
- ☐ No puede efectuarse el producto

85. ¿Es posible que para dos matrices A y B NO CUADRADAS, puedan existir $A \cdot B$ y $B \cdot A$?

- ☐ Sí, si tienen la misma dimensión
- ☐ Sí, si las filas de la primera coinciden con las columnas de la segunda y viceversa
- ☐ Sólo si $A^t = B$
- ☐ Sólo si $B^t = A$
- ☐ No, nunca

86. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix}$$

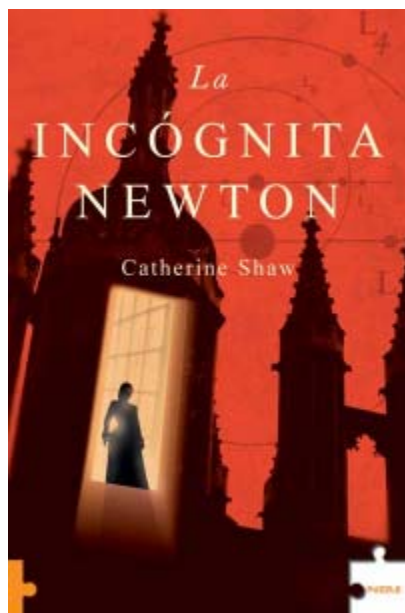
- ☐ $B = A$ si $x = 2, y = 3$ y $z = 2$
- ☐ $B = A$ si $x = 3, y = 3$ y $z = 2$
- ☐ $B = A$ si $x = 5, y = 3$ y $z = 3$
- ☐ $B = A$ si $x = 2, y = 3$ y $z = 3$
- ☐ A y B nunca pueden ser iguales

Φ LITERATURA MATEMÁTICA Φ

Marta Martín Sierra

Un matemático que no tiene también algo de poeta nunca será un matemático completo. (Karl Weierstrass)

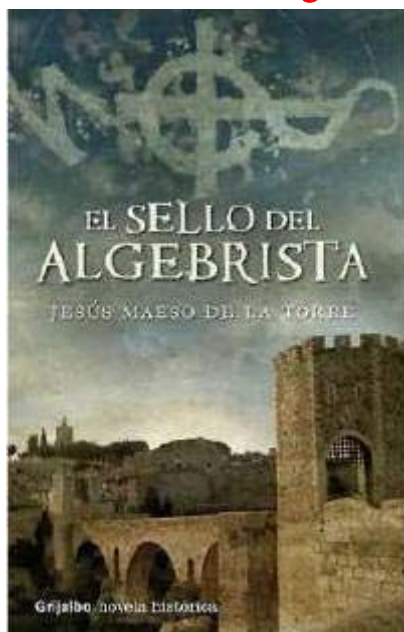
La incógnita Newton ΦΦΦ (Catherine Shaw)



Cambridge, año 1888. Vanesa Duncan es una joven institutriz que ha empezado a trabajar recientemente en la ciudad universitaria como maestra de niños. Gracias a las familias para las que trabaja, tiene la oportunidad de relacionarse con las más privilegiadas mentes de la prestigiosa universidad. Además, el momento no podía ser más emocionante: todos se hallan inmersos en la investigación del “problema de los tres cuerpos”. El rey Oscar de Suecia ha decidido que para su 60 aniversario concederá un sustancial premio a aquel matemático que consiga resolver el problema, que fue planteado por primera vez por Isaac Newton. Sin embargo, todo da un giro inesperado cuando el profesor adjunto de matemáticas, Akers, es encontrado muerto en sus habitaciones de un violento golpe en la nuca y el

enamorado de la srta. Duncan, otro matemático llamado Weatherburn, es acusado del crimen. Vanesa se verá empujada a una inesperada aventura que le llevará por media Europa en busca del verdadero culpable en una carrera desesperada en contra de la horca.

El sello del algebrista ΦΦΦ (Jesús Maeso de la Torre)



En el siglo XIV, un anciano herborista llama a su lecho de muerte a Diego Galaz, maestro de Álgebra educado en un convento, y le revela que su nacimiento oculta un gran secreto. En su agonía le entrega un eslabón que lo une a su familia: un enigmático anillo en el que aparecen buriladas las barras de Aragón y el símbolo de la inmortalidad de Israel. Es una excelente recreación histórica de los tiempos de la convivencia árabe, judía y cristiana en territorio hispánico, con un gran despliegue de imaginación, vigor narrativo y sabiduría histórica, el autor desvela los misterios de los algebristas de Alejandría y la vida de los místicos de las cuevas de Qumran, así como las intrigas de las Cortes de Castilla y Aragón, a través de una trama subyugante y con escenas de gran intensidad que llevan al más insos-

pechado desenlace.

Ampliar

1 LAS MATEMÁTICAS Y EL CINE



Marta Martín Sierra y Abel Martín

La presentación oficial de este trabajo ha sido en las



celebradas del 4 al 7 de julio de 2007 en Granada, en el ZOCO titulado

LAS MATEMÁTICAS Y EL CINE

La Exposición constó de 30 láminas, con el objetivo de hacer un cóctel en el que los ingredientes principales sean LAS MATEMÁTICAS Y EL CINE, como medio de popularización y divulgación, donde se intentó cuidar en especial los procedimientos y la forma de mezclarlos, para que al alumnado le guste, le sienta bien, y le permita hacer una mejor digestión de los conceptos y la abstracción matemática, con la intención de que sea para todo y para todos. Se presentó una lámina inicial y otras 29 con películas que, a nuestro juicio, mejor cubrían en esos momentos los objetivos buscados.



Iniciaremos la serie, sin lugar a dudas, con una película que no podéis dejar de ver:



UNA MENTE MARAVILLOSA (2001) (A Beautiful Mind)

Como siempre se nos va a presentar al protagonista, un matemático, con el estereotipo habitual, un chiflado, que llega incluso a la esquizofrenia. Sus trabajos son secundarios en el desarrollo del film.

Escena: 12:24 - 14:29 minutos

En el bar de la Universidad, una chica atractiva muestra su interés por Nash. Éste acude al convite pero, torpe en habilidades sociales, no acierta a iniciar la conversación. Finalmente dice: **"No sé qué es lo que se espera que diga para que tenga relaciones sexuales contigo pero, ¿podríamos fingir que ya lo he dicho todo?, sólo se trata de un intercambio de fluidos ¿no?, ¿podríamos pasar directamente al sexo?"** La respuesta de la chica es un sonoro bofetón.

En si misma no tiene gran importancia pero, cuando transcurre la película, en una situación parecida, y con Alicia como coprotagonista, la reacción es totalmente diferente ya que hay otra serie de pasos intermedios en la metodología a seguir para "organizar" una actividad o resolver un problema, y que trae como consecuencia un desenlace totalmente distinto.

CASIO lanza dos joyas para el aula:

La FX-9860G Slim

Calculadora en forma de libro

● En abril de 2007 en la Convención de Viena se nos presenta esta máquina, que nos recuerda en cierta manera a aquella a aquella FX-7500G GRAPHICS de 1985, con formato externo de agenda electrónica con apertura en forma de "libro".



● Diseño moderno de calculadora gráfica, con "pantalla natural" plegable e iluminación de fondo.

● Sistema de Software Add-In.

● Función de ayuda integrada (HELP).

● Disponible literatura y asistencia al profesor para la calculadora.

● Geometría dinámica como Add-in.

● Actividades electrónicas (eActivity).

● Funciones matemático-financieras.

● Sistema periódico y aplicaciones para Física (Add-in).

● Hoja de cálculo (preinstalada)

● Conexión USB.

● Aparatos adicionales disponibles. Posibilidad de intercambio de datos con otros aparatos.

● Añade un sistema avanzado para descargar de forma gratuita "Software Developer's Kit (SDK)" para la creación de aplicaciones. Es necesario registrarse.

● En septiembre de 2007 empieza a comercializarse.



El software del FX - ES Emulador para PC

En NOTICIA DE PRENSA del 26 de febrero de 2007, CASIO anuncia en Londres el lanzamiento del emulador de la calculadora para las escuelas BRITÁNICAS, siendo presentada al resto de las Divisiones Didácticas europeas en la Convención de Viena, el 21 de abril de 2007. El software del PC reproduce los modelos de Casio FX-83ES y FX-85ES.

Esta tecnología fue utilizada tradicionalmente sólo con las Calculadoras Gráficas para las Matemáticas avanzadas, pero este nuevo software abre el mercado científico del emulador a todas las aulas del mundo en escuelas primarias y secundarias.

Combina las ventajas del emulador para la enseñanza, que permite la visión de la pantalla de visualización accesible a todos los puntos del aula, con la posibilidad de que cada alumno tenga su propia calculadora de mano, optimizando así sus prestaciones tanto didácticas como de cálculo.



Permitirá a los profesores demostrar fácilmente a toda la clase tanto instrucciones de manejo como de utilización didáctica de la calculadora, aumentando la interacción entre estos y el alumnado, pudiendo realizarse las explicaciones y aclaraciones de una manera más sencilla a través de un cañón.

Por un lado aparecerá la calculadora, para que vayamos viendo los botones y menús que se van presionando y utilizando, y por otro lado la pantalla ampliada, para observar de forma sencilla los resultados que se van obteniendo.

Otra de las grandes ventajas para los profesionales de la enseñanza será la posibilidad de capturar pantallas de forma inmediata, lo que permitirá generar apuntes y trabajos, para realizar presentaciones, sólo con copiar y pegar.



AULA MATEMÁTICA



Domingo 19 de Agosto de 2007

Principal

- IES Pérez de Ayala
- Educastur
- Universidad de Oviedo

ESO Matemáticas

- Competencias básicas
- Decálogo de la Didáctica de las Matemáticas

1º ESO Matemáticas

- Programación docente
- Unidades didácticas
- Actividades
- Programas de apoyo
- Taller aprendizaje

2º ESO Matemáticas

- Programación docente
- Unidades didácticas
- Actividades
- Programas de apoyo
- Taller aprendizaje

Pruebas Diagnóstico

- Generales
- De Centro

3º ESO Matemáticas

- Programación docente
- Unidades didácticas
- Actividades

4º ESO Opción A

- Programación docente
- Unidades didácticas
- Actividades
- Proyecto de Ámbito

4º ESO Opción B

- Programación docente
- Unidades didácticas
- Actividades
- Taller de Matemáticas
- Proyecto de Ámbito

Matemáticas Bach

- 1º C.C.S.S.
- 2º C.C.S.S.
- 1º Científico
- 2º Científico

PAU matemáticas

- Matemáticas II
- Matemáticas Aplicadas

Actividades

- Extraescolares
- Complementarias

Glosario bilingüe

- Castellano - Inglés
- Inglés - Castellano

Puzzles 3D

- El Cubo Soma
- El Cubo Diabólico
- El Cubo Steinhaus
- Los dados celtas

Área de descanso



NUEVO

Web de la calculadora Científica y Gráfica en el aula

Descripción: Entramos en el mundo de las nuevas metodologías en la enseñanza de las Matemáticas.



MATEMÁTICAS Y CINE

Descripción: Basado en el trabajo presentado en las XIII JAEM de Granada 2007, trata de ser el portal referencia en el que podemos encontrar Matemáticas en las diferentes películas, fomentando el gusto por las mismas a través del cine.

Niveles: Primaria / Secundaria / Bachto / Universidad.



Aventuras de GEOMETRÍA

Descripción: Geometría, la protagonista de nuestro cuento, es una niña inquieta, inteligente, juguetona y valiente, que se enfrenta a lo largo de aventuras con juegos, pruebas, preguntas y acertijos.

Niveles: Primaria / secundaria.



EL RETO MATEMÁTICO

Descripción: Pon a prueba tu capacidad de investigación y resolución

- Concurso en el IES
- Actividad matemática



12 mayo. Día Escolar de las Matemáticas

Descripción: Cada año se propone un tema para conmemorar el Día Escolar de las Matemáticas. La fecha concreta vino sugerida porque ese año se cumplía el centenario del nacimiento de Pedro Puig Adam, internacionalmente reconocido en el campo de la enseñanza de las Matemáticas



Concurso "Calculemos"

Descripción: CASIO, convoca el concurso ¡Calculemos! para potenciar y favorecer el uso de la calculadora como recurso didáctico.

Generalitat de Catalunya
Junta de Andalucía
Principado de Asturias



NUEVO

Literatura matemática

Descripción: Iremos destacando algunos libros de literatura, de tema Matemático, que nos hayan gustado, así como presentaremos novedades editoriales. Esperamos luego tu colaboración aportando libros, citas, etc. para ir añadiéndolas poco a poco.

NOVEDADES

- Modelos matemáticos y Aplicaciones científico-técnicas. (Dr. Ludwig Paditz) **DOWNLOAD NOW**
- Nueva Exposición de Helaman Ferguson, en "Arte y Matemáticas".
- Salidas profesionales de los estudios de matemáticas.
- Nuevos programas
- En septiembre de 2007 aparece la nueva fx 9860G Slim
- Actividades resueltas aplicaciones de las derivadas

Museo de la Calculadora



- Calculadora Gráfica
- ClassPad Museo
- Museo Balsach

Cursos ON LINE



ClassPad Gráfica



Calculadora Científica

AULA VIRTUAL

Trabajos del Webmaster

- Revistas
- Congresos
- Libros
- Cursos
- Seminarios y GT

Ocio matemático

- Efectos ópticos
- Juegos topológicos
- Chistes matemáticos
- Lecturas
- Ponte a prueba
- ¿Adivinación?

Historia

- Los Matemáticos
- Historia de los números

Sociedades

- Sadem (Asturias)
- Thales (Andalucía)
- Otras sociedades

Revistas matemáticas

- Aula Matemática Digital
- 22/7
- Otras revistas

Software

- Matemáticas

Visitantes

- Foro general
- Páginas amigas
- Libro de visitas
- Acceso restringido
- Mis notas
- Email

1 en línea

0340297
Hoy: 38
Ayer: 363

Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar (Hipatia)

