Trabajar los números complejos con la ayuda de la calculadora gráfica

Rosana Álvarez García, Profesora de Tecnología del I.E.S. "Sánchez Lastra", de Mieres (Asturias)

La calculadora gráfica nos permite realizar operaciones sencillas con números complejos como:

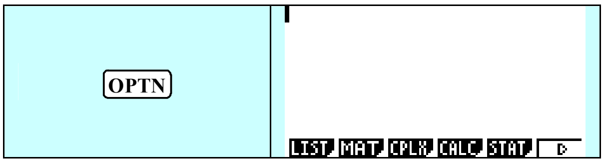
- Sumas
- Restas
- Productos
- Cocientes
- Raíces cuadradas
- Cuadrados y potencias de grado superior tomando como punto de partida los cuadrados.
- Calculo del argumento en grados
- Módulo
- Parte real y parte imaginaria

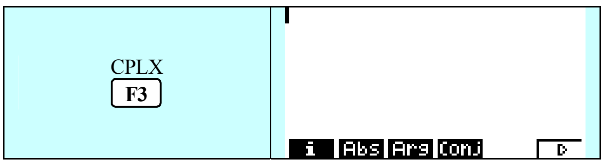
Quizás la mayor aplicación de la calculadora gráfica en el tema de números complejos se obtendría en asignaturas como Tecnología donde hay numerosos ejercicios que requieren trabajar con números complejos.

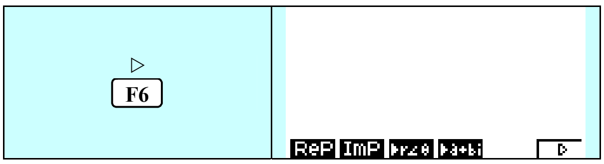
Para empezar en la calculadora deberemos seguir los siguientes pasos:

⇨ Trabajaremos en el modo "encerado" (RUN), desde el que podemos realizar las diferentes operaciones:

Tomaremos como bases la FC 9860G SD de CASIO



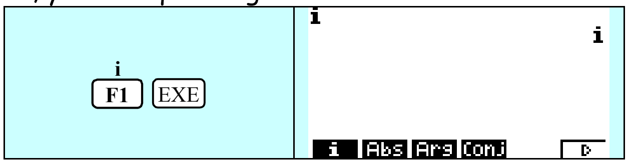




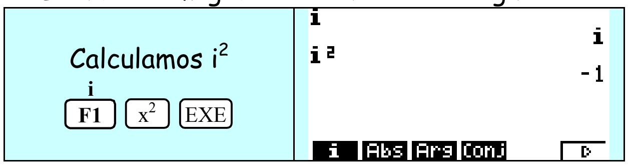
Una vez en números complejos en la parte inferior de la pantalla nos aparecen diferentes posibilidades, el número i, el módulo, argumento, conjugado, parte real, parte imaginaria, pasar de forma binómico a polar y de forma polar a binómica.

Cálculo de potencias de la unidad imaginaria:

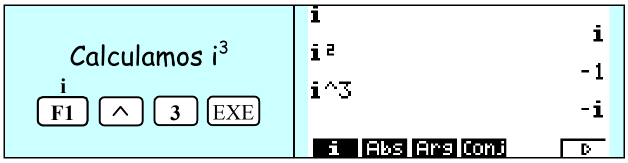
La unidad imaginaria la obtenemos presionando F1, y vemos que es igual a i.

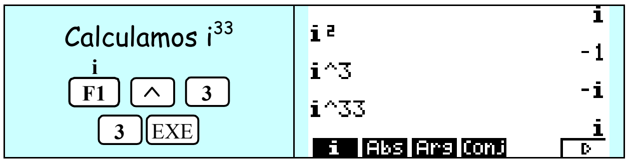


La unidad imaginaria al cuadrado es igual a:



Para calcular las diferentes potencias de i vamos elevando.





Aplicación de los números complejos en Tecnología

FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

El número complejo (a, b) puede escribirse:

(a, b) =

Aplicando la definición de suma de números complejos

= (a, 0) + (0, b) =

Aplicando la definición de un número real por un número complejo

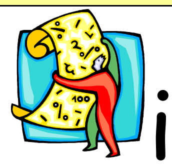
= (a, 0) + b·(0, 1) =

teniendo en cuenta que el número complejo (0, 1) se representa por i

= (a, 0) + b·i =

Definición de paso de forma cartesiana a binómica

a + bi



Esta forma de escribir el número complejo (a, b) se llama FORMA BINÓMICA.

$z = \underbrace{a}_{\text{parte real de z, Re(z)}} + \underbrace{bi}_{\text{parte imaginaria de z, Im (z)}}$

(a, b)

Se llama forma cartesiana o forma de par.

IGUALDAD EN FORMA BINÓMICA

Dos números complejos $a + bi \wedge a' + b'i$ se dice que son iguales si, y sólo si, se verifica que $a = a' \wedge b = b'$

OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

SUMA

DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA

Sean dos números complejos:

$z = a + bi \wedge z' = a' + b'i$

$z = (a, b) \wedge z' = (a', b')$

$z + z' =$

$(a, b) + (a', b') =$

Aplicando la definición de suma de números complejos

$= (a + a', b + b') =$

Aplicando la definición de suma de números complejos

$= (a + a', 0) + (0, b + b') =$

Aplicando la definición de un número real por un número complejo

$= (a + a', 0) + (b + b') (0, 1) =$

Definición de paso de forma cartesiana a binómica

(a + a') + (b + b')i

Tiene estructura de GRUPO ABELIANO

$(a, b) \cdot (a', b') =$

Aplicando la definición de producto de números complejos

$= (a{\cdot}a' - b{\cdot}b', a{\cdot}b' + b{\cdot}a')=$

$= (a{\cdot}a' - b{\cdot}b') + (a{\cdot}b' + b{\cdot}a')i$

Aplicando la definición de paso de forma cartesiana a binómica

DIFERENCIA

DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA

Sean dos números complejos:

$z = a + bi \wedge z' = a' + b'i$

$z = (a, b) \wedge z' = (a', b')$

$z - z' = z + (- z') =$

$(a, b) + (- a', - b') =$

Aplicando la definición de suma de números complejos

$= (a - a', b - b') =$

Aplicando la definición de suma de números complejos

$= (a - a', 0) + (0, b - b') =$

Aplicando la definición de un número real por un número complejo

$= (a - a', 0) + (b - b') (0, 1) =$

Definición de paso de forma cartesiana a binómica

(a - a') + (b - b')i

PRODUCTO

DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA

Sean dos números complejos:

$z = a + bi \wedge z' = a' + b'i$

$z = (a, b) \wedge z' = (a', b')$

$z \cdot z' =$

COCIENTE

DEMOSTRACIÓN ALGEBRAICA

Sean dos números complejos:

$z = a + bi \wedge z' = c + di$

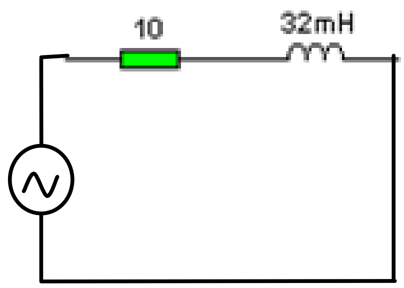
$z = (a, b) \wedge z' = (c, d)$

$\frac{z}{z'} =$

$= z \cdot z^{-1}$

Actividad 1

El circuito representado en la figura inferior está constituido por un generador de corriente alterna de 220 V, una resistencia de 10 Ω y una bobina de 0.032 Henrios. La frecuencia es de 50 Hz



Se pide: Determinar la impedancia, la intensidad que recorre el circuito en forma vectorial

Las resistencias del circuito se expresan de la siguiente forma:

Receptor	Reactancia	Desfase	Forma compleja	Tensión
Resistencia	R	$\varphi = 0$	$\vec{R} = R + 0j = R_{0°}$	$U_R = R \cdot I$
Inductancia	$X_L = \omega \cdot L$	$\varphi = 90°$	$\vec{X_L} = 0 + X_L\, j = X_{L(90°)}$	$U_L = X_L \cdot I$
Capacitancia	$X_c = \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\varphi = 90°$	$\vec{X_C} = 0 - X_C \cdot j\, X_{L(90°)}$	$U_C = X_L \cdot I$

Antes de llevar a cabo el cálculo vectorial expresamos las diferentes magnitudes en forma binómica. El dato proporcionado por el problema es el de la tensión asignándole un ángulo de desfase 0.

Las resistencias del circuito son:

$$R = 10 + 0 \cdot j$$

$$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0.032H = 10\Omega$$

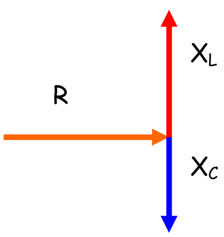
$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = 0$$

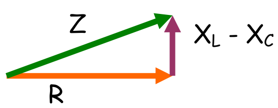
$\Rightarrow$ **No hay condensador en el circuito.**

Para trabajar en forma vectorial debemos trabajar con las formas binómicas:

Resistencia	Forma binómica
$R = 10 + 0 \cdot j$	$\vec{R} = 10 + 0 \cdot j$
$X_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$ $= 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0.032H$ $= 10\Omega$	$\vec{X_L} = 0 + 10 \cdot j\ \Omega$
$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = 0$	$\vec{X_C} = 0 - 0j$

La impedancia es la resistencia final que aparece en el circuito, y que obtenemos como suma de las diferentes resistencias que aparecen. Es igual a:





$$\vec{Z} = R + (X_L - X_C)\, j$$

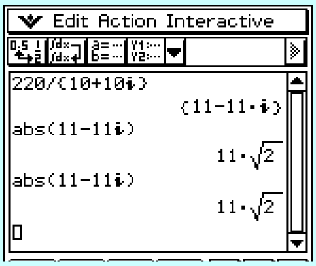
y su módulo:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

La tensión del generador es $\vec{U} = 220 + 0\, j$

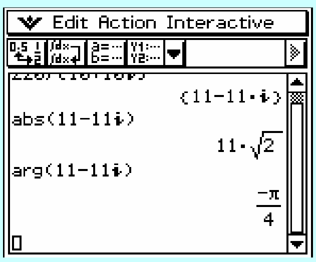
Por tanto la intensidad que circula por el circuito es:

$$\vec{U} = \vec{I} \cdot \vec{Z} \Rightarrow \vec{I} = \frac{\vec{U}}{\vec{Z}} = \frac{220}{10 + 10j}$$



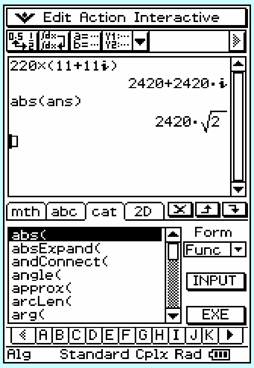
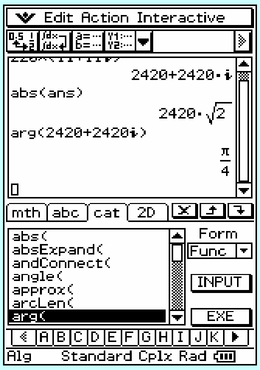
El cociente nos da el complejo 11 – 11i, en nuestro caso como asignamos la i a la magnitud de la intensidad la solución es 11 – 11 j

La forma polar es:

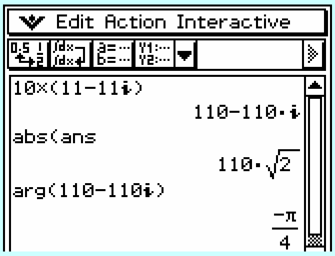
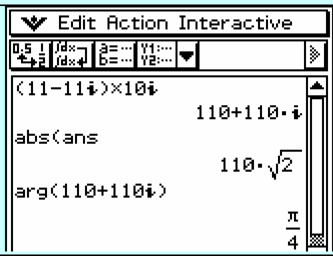


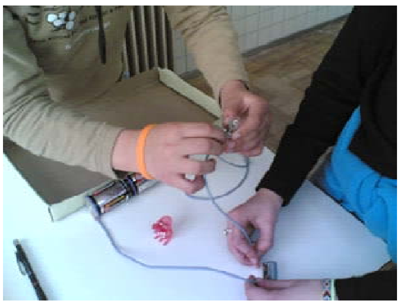
La intensidad se retrasa 45 °
respecto a la tensión

Para calcular las potencias del circuito tenemos:

Potencia aparente	$\vec{S} = \vec{I} \cdot \vec{U} = 220 \cdot (11 + 11j)$
	
La potencia aparente es 2420 + 2420 j, de módulo $2420\sqrt{2}$ y argumento 45°. **S = 3422.39 VA**	
Potencia activa	$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = R \cdot I^2 = U_R \cdot I =$ $= 10 \cdot 15.56^2 = 2421.14$ W
Potencia reactiva	$Q = U \cdot I \cdot \operatorname{sen} \varphi = (X_L - X_C) \cdot I^2 =$ $10 \cdot 15.56^2 = 2421.14$ VAR

En cuanto a las tensiones tenemos:

Tensión en bornes de una resistencia $\vec{U}_R = \vec{R} \cdot \vec{I} = 10 \cdot (11 - 11\,i) = 110 - 110\,i$	
Tensión en bornes de una autoinducción $\vec{U}_L = \vec{X}_L \cdot \vec{I} = (11 - 11\,i) \cdot (10\,i) = 110 + 110\,i$	
Tensión en los bornes de un condensador	$\vec{U}_C = \vec{X}_C \cdot \vec{I} = 0$
Tensión en un circuito RLC	$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C$ $\vec{U} = (110 - 110i) + (110 + 110i) = 220$ V



Cuando trabajamos con circuitos en serie y en paralelo, los sistemas de ecuaciones con números complejos se complican siendo el uso de la calculadora una herramienta fundamental en la resolución de los ejercicios

www.aulatecnologia.com