Trabajar los esfuerzos a los que se ve sometida una viga con la ayuda de la calculadora gráfica

Rosana Álvarez García, Profesora de Tecnología del I.E.S. "Alfonso II", de Oviedo (Asturias)

Las vigas constituyen un elemento fundamental de la mayoría de las estructuras mecánicas. Las cargas que soportan producen en ellas una serie de deformaciones que se manifiestan en pequeñas curvaturas que se denominan **flexión**.

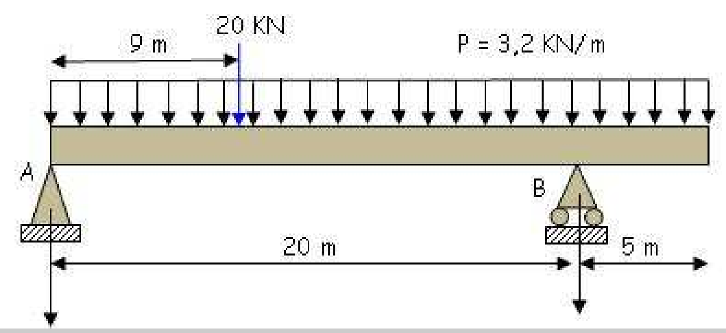
El estudio de estas deformaciones precisa conocer el esfuerzo cortante y el momento flector en cada una de las secciones de la viga.

La calculadora gráfica nos permite representar y resolver las ecuaciones resultantes del estudio de las fuerzas que actúan sobre la viga ayudándonos en la resolución e interpretación de los esfuerzos que sufren las estructuras al ser sometidas a determinadas fuerzas.

Vamos a ver las aplicaciones de la calculadora gráfica en la resolución del siguiente ejercicio:

Actividad 1

La viga de la figura soporta una carga uniforme de 3,2 KN/m y una carga concentrada de 20 KN. Representar el diagrama de esfuerzos internos y dimensionar la viga teniendo en cuenta que la tensión admisible es de 24 000 N/cm^2. Suponer un perfil cuadrado.



Una carga uniforme equivale a una carga puntual de valor P = p·l y situada en el centro de gravedad de la sección de viga a la que afecta.

En primer lugar calculamos el valor de las reacciones en los apoyos y los momentos entre ellos.

Si la viga está estática la suma de las fuerzas verticales y horizontales debe ser cero, es decir:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

El momento resultante también debe ser 0:

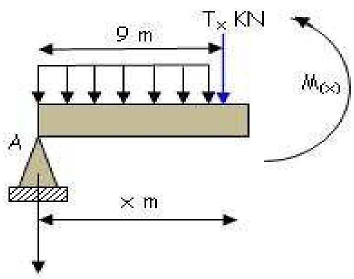
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \quad 20\ KN·9m + 3,2\ KN/m·25m·25/2m + R_B·20 = 0$$

$$R_B = -59\ KN$$

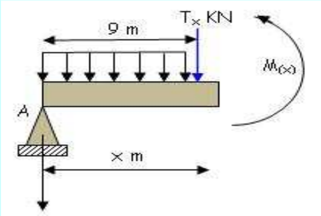
$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \quad -20\ KN·11m + 3,2\ KN/m·25m·20/2m + R_A·20 = 0$$

$$R_A = -29\ KN$$

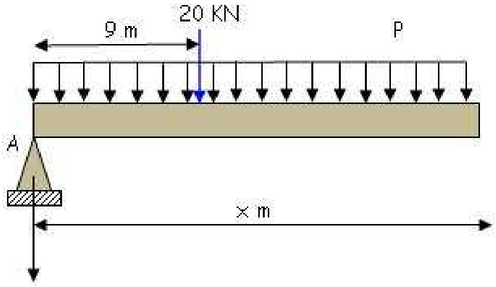
Para que la viga quede definida debemos estudiar tres secciones. La primera sección corresponde a la parte de la viga situada entre el punto A y la fuerza de 20 KN.

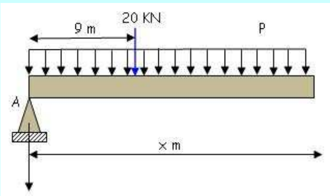


Esta primera sección está comprendida entre o y 9 m, y de su análisis obtenemos las siguientes ecuaciones:

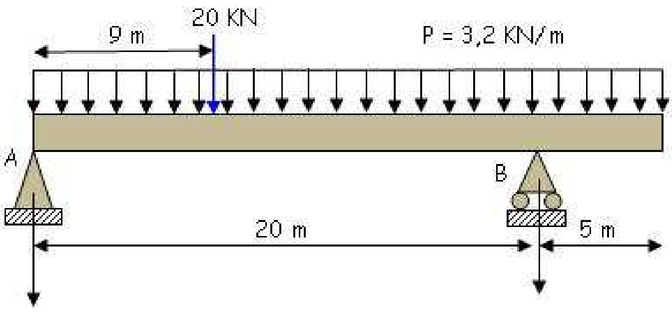
$0<x<9$ 	$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + p\cdot x + T(x) = 0$ $T(x) = -3{,}2\cdot x + 41$ $\Sigma M_x = 0 \Rightarrow \quad R_A\cdot x + p\cdot x\cdot x/2 + M_{(x)} = 0$ $M_{(x)} = -1{,}6\cdot x^2 + 41\cdot x$

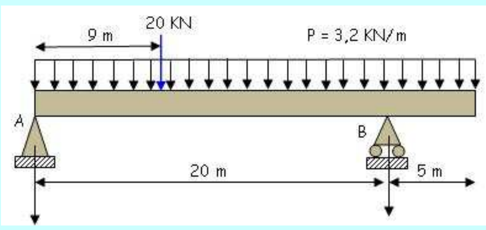
En la segunda sección de la viga vamos desde el recorriendo la viga desde el punto A hasta el punto B:



$9<x<20$ 	$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + p\cdot x + 20 + T(x) = 0$ $T(x) = -3{,}2\cdot x + 21$ $\Sigma M_x = 0 \Rightarrow R_A\cdot x + p\cdot x^2/2 + 20\cdot(x-9) + M_{(x)} = 0$ $M_{(x)} = -1{,}6\cdot x^2 + 21\cdot x + 180$

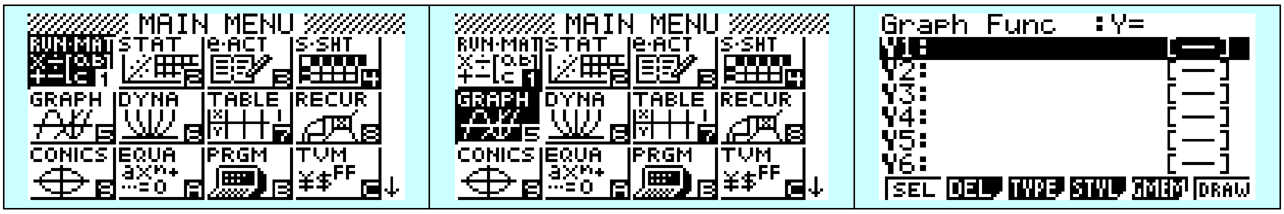
En la tercera sección recorremos la viga desde los 20 metros hasta el final:



$20<x<25$ 	$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + p\cdot x + 20 + R_B + T(x) = 0$ $T(x) = -3{,}2\cdot x + 80$ $\Sigma M_x = 0 \Rightarrow R_A\cdot x + p\cdot x^2/2 + 20\cdot(x-9) + R_B\cdot(x-20) + M_{(x)} = 0$ $M_{(x)} = -1{,}6\cdot x^2 + 80\cdot x - 1000$

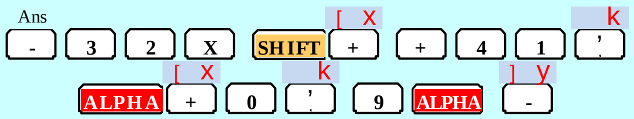
Vamos a representar las gráficas de cada sección empleando la calculadora CASIO fx-9860G.

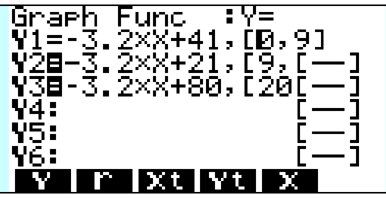
Desde el MENU de la calculadora y utilizando los cursores accedemos al modo GRAPH



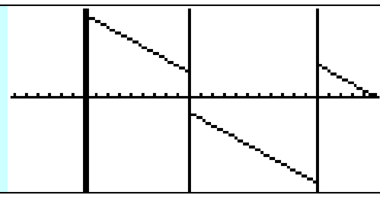
Tecleamos las ecuaciones obtenidas en cada sección para los esfuerzos y los momentos

Para delimitar el intervalo de cada ecuación en la calculadora gráfica debemos introducir la ecuación una coma y el intervalo entre 0 y 9 entre corchetes



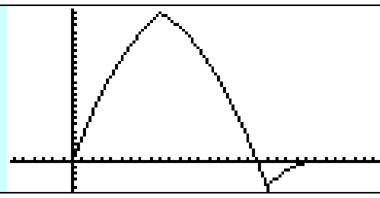


Obtenemos el siguiente diagrama de esfuerzos

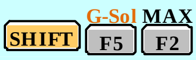


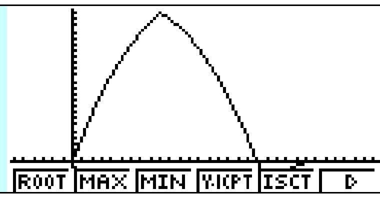
En el caso de los momentos tendremos:

Introducimos los datos en la calculadora en el modo GRAPH y nos queda:

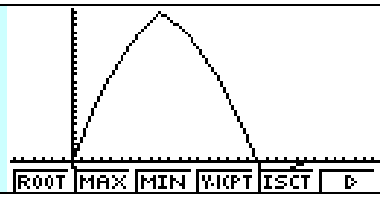


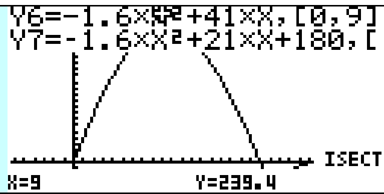
Para dimensionar la viga debemos conocer el máximo de la función, para ello:





En este caso el máximo se alcanza en el punto de corte entre las dos curvas, con la calculadora:





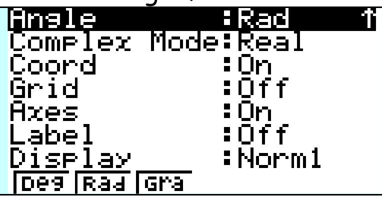
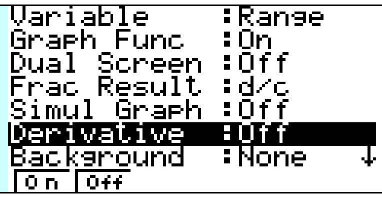
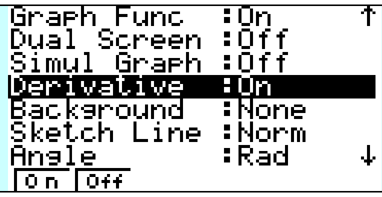
Es necesario conocer el punto en el que la viga presenta un mayor momento flector que como vimos gráficamente se corresponde con el punto 9 y un esfuerzo flector de 239,4.

Todo momento flector origina una tensión normal que depende del valor del flector, de la distancia a la fibra neutra y el momento de inercia. La máxima tensión que se produce en la fibra más alejada de la fibra neutra ($y_{máx} = \frac{1}{2}$)

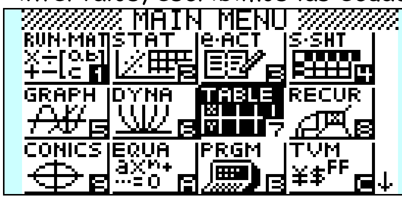
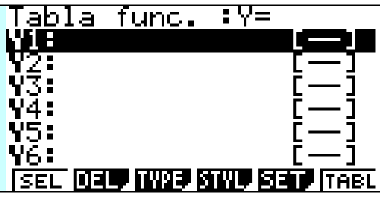
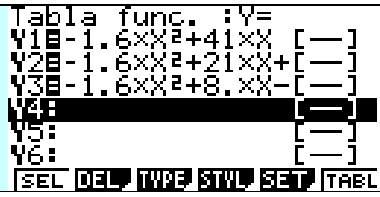
$$\sigma = \frac{M_{máx} \cdot y}{I} = \frac{239\,400 Nm \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{12} \cdot l^4}$$

l = 18,16 cm

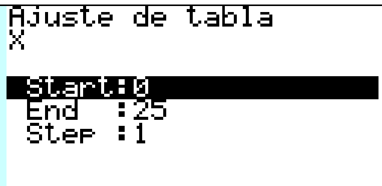
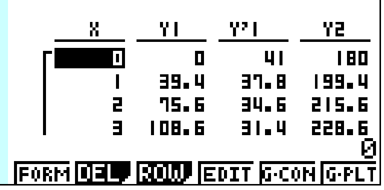
Otra forma de calcular el punto con el momento flector mayor es a través de las derivadas de cada ecuación, para ello seguiremos los siguientes pasos con la calculadora gráfica:

Activamos la opción de derivadas en la calculadora: SHIFT SET UP MENU	
Con los cursores bajamos hasta la opción derivada	
ON F1	

Volvemos a escribir las ecuaciones en la calculadora pero desde el modo TABLE y sin especificar intervalos, escribimos las ecuaciones de los momentos flectores:

Obtenemos la tabla de valores estableciendo previamente los valores a calcular, en nuestro caso los valores que toma la variable x van desde 0 a 25; establecemos el intervalo con el que queremos trabajar:

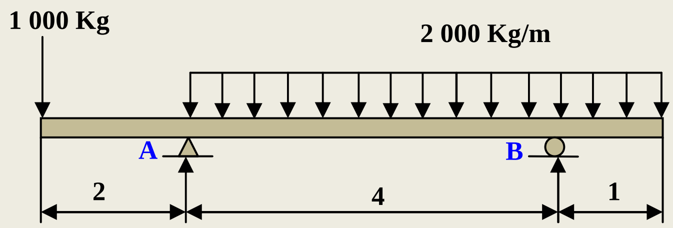
SET F5		TABL F6	

Ya tenemos las tres funciones que nos indican el comportamiento del momento flector en cada sección con la derivada en cada punto asociada.

El punto en el que la derivada primera sea cero, tenemos un máximo o un mínimo, puntos de mayor esfuerzo flector en la viga. Una vez conocidos estos puntos llevaríamos a cabo su estudio. En este caso el momento flector máximo se encuentra en el punto de corte de las dos funciones resultantes en el planteamiento del problema.

Actividad 2

Analizar la viga de la figura determinando los momentos máximos positivo y negativo y trazando los diagramas de fuerzas cortantes y momentos flectores. El perfil I de la viga si σ_{adm} = 1 200 Kg/cm^2



Una carga uniforme equivale a una carga puntual de valor P = p·l y situada en el centro de gravedad de la sección de viga a la que afecta.

En primer lugar calculamos el valor de las reacciones en los apoyos y los momentos entre ellos.

Si la viga está estática la suma de las fuerzas verticales y horizontales debe ser cero, es decir:

$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$

El momento resultante también debe ser 0:

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \quad 2\,000\ Kg \cdot 5m \cdot 5/2\ m - 1\,000\ Kg \cdot 2\ m - R_B \cdot 4 = 0$

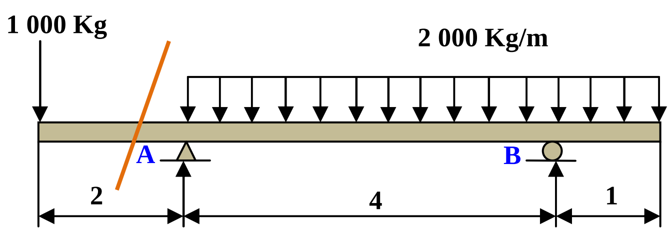
$$25\,000 - 2\,000 - 4 \cdot R_B = 0$$

$$R_B = 5750\ Kg$$

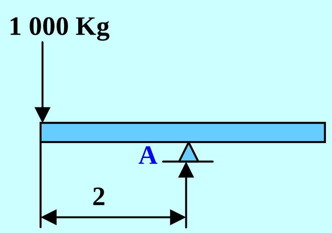
$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow \quad -1\,000\ Kg \cdot 6\ m - 2\,000\ Kg/m \cdot 5\ m \cdot 1{,}5\ m + R_A \cdot 4 = 0$

$$R_A = 5\,250\ Kg$$

Para que la viga quede definida debemos estudiar tres secciones. La primera sección corresponde a la parte de la viga situada entre la fuerza de 1 000 Kg y el punto A.

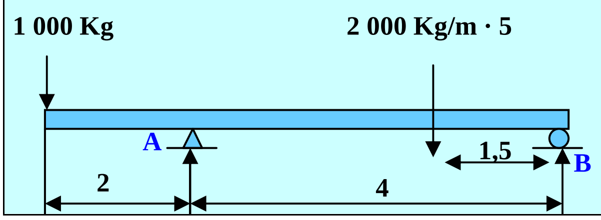


Esta primera sección está comprendida entre 0 y 2 m, y de su análisis obtenemos las siguientes ecuaciones:

$0 < x < 2$ 	$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow R_A + T(x) = 0$ $T(x) = -1\,000\ Kg$ $\Sigma M_x = 0 \Rightarrow \quad M_{(x)} = 0$ $M_{(x)} = -1\,000 \cdot x$

En la segunda sección de la viga vamos desde el recorriendo la viga desde el punto A hasta el punto B:

$2 < x < 6$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow\ R_A + p\cdot x + 1\,000 + T(x) = 0$

$T(x) = 5\,250 - 2\,000\cdot(x - 2) - 1\,000$

$T(x) = -2000\cdot x + 8250$

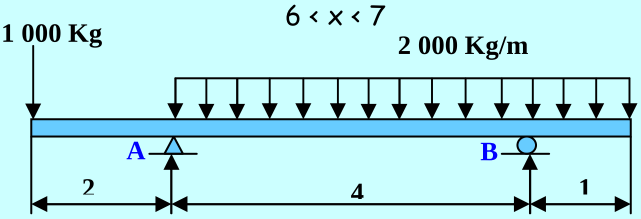
$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow$

$M_{(x)} = -1\,000\cdot x + 5250\cdot(x-2) - 2000\cdot(x-2)^2/2$

$M_{(x)} = -1\,000\cdot x^2 + 8\,250\cdot x - 14\,500$

En la tercera sección recorremos la viga desde los 6 metros hasta el final:

$6 < x < 7$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$

$-1000 + 5250 - 2000\cdot x + 5750 + T(x) = 0$

$T(x) = -2000\cdot(x - 6) + 2000$

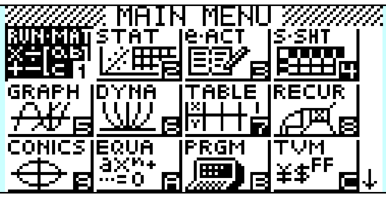
$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow$

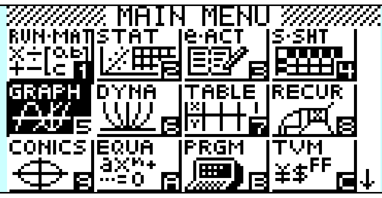
$-1000\cdot x + 5250\cdot(x-2) - 2000\cdot(x-2)^2/2 + 5750\cdot(x-6) + M_{(x)} = 0$

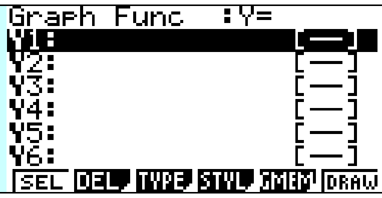
$M_{(x)} = -100\cdot x^2 + 14\,000\cdot x - 49\,000$

Vamos a representar las gráficas de cada sección empleando la calculadora CASIO fx-9860G.

Desde el MENU de la calculadora y utilizando los cursores accedemos al modo GRAPH

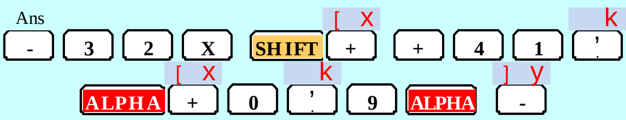




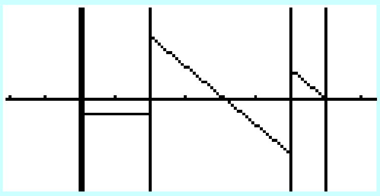


Tecleamos las ecuaciones obtenidas en cada sección para los esfuerzos y los momentos

Para delimitar el intervalo de cada ecuación en la calculadora gráfica debemos introducir la ecuación una coma y el intervalo entre 0 y 9 entre corchetes

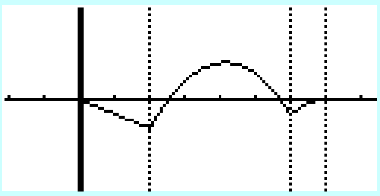


Obtenemos el siguiente diagrama de esfuerzos

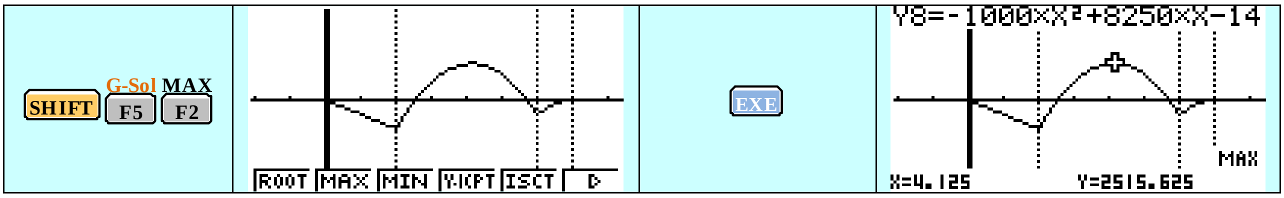


En el caso de los momentos tendremos:

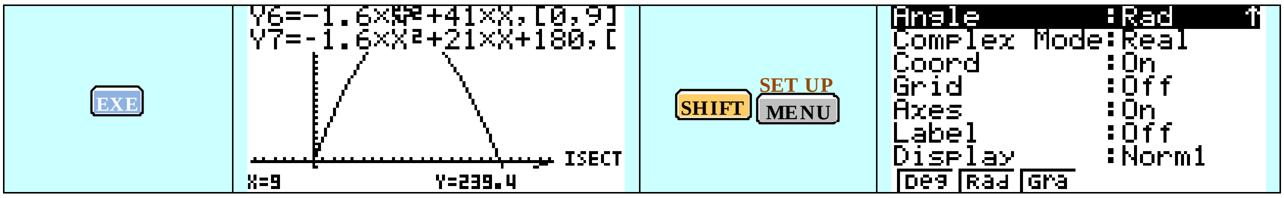
Introducimos los datos en la calculadora en el modo GRAPH y nos queda:



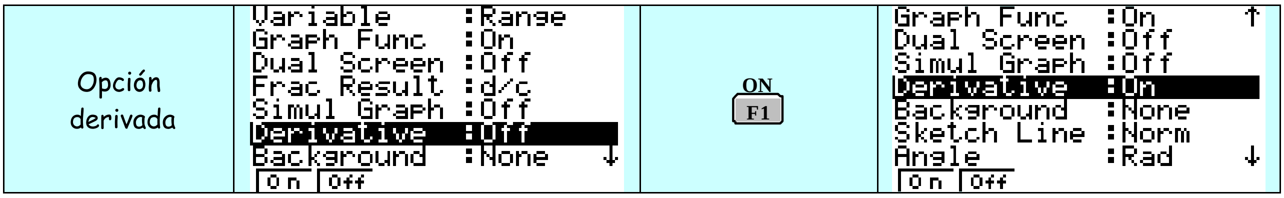
Para dimensionar la viga debemos conocer el máximo de la función, para ello:



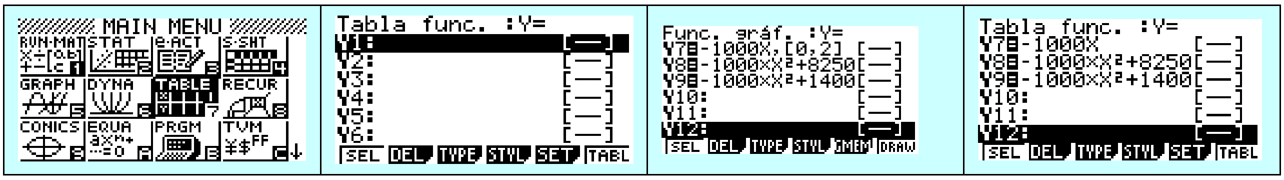
En este caso el máximo se alcanza en el punto (4.125, 2515.625)



Otra forma de calcular el punto con el momento flector mayor es a través de las derivadas de cada ecuación, para ello seguiremos los siguientes pasos con la calculadora gráfica.

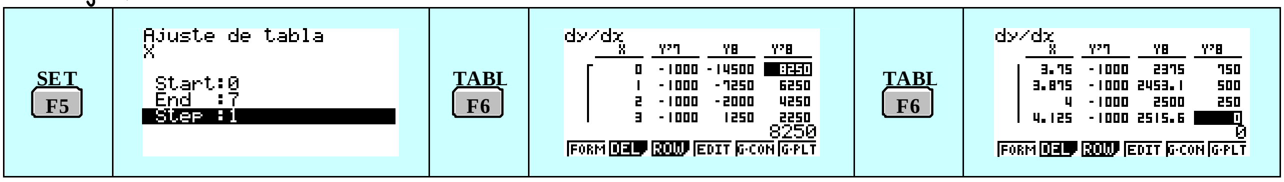


Volvemos a escribir las ecuaciones en la calculadora pero desde el modo TABLE y sin especificar intervalos. Escribimos las ecuaciones de los momentos flectores.



Tenemos que eliminar los intervalos para poder trabajar en el modo tabla

Obtenemos la tabla de valores estableciendo previamente los valores a calcular, en nuestro caso los valores que toma la variable x van desde 0 a 25. Establecemos el intervalo con el que queremos trabajar.



Para x = 4.125 el valor de la derivada de la ecuación del segundo momento flector es nula, lo que indica la presencia de un máximo o un mínimo, que se observa en la gráfica.

Ya tenemos las tres funciones que nos indican el comportamiento del momento flector en cada sección con la derivada en cada punto asociada.

El punto en el que la derivada primera sea cero, tenemos un máximo o un mínimo, puntos de mayor esfuerzo flector en la viga.

Como ya vimos el valor máximo positivo del momento, se obtiene en la sección de abscisa x = 4.125.

Para este valor obtenemos un momento de valor aproximado de 2516 Kg·m

El perfil lo obtenemos calculando el momento máximo en relación con la tensión máxima admisible, σ_{adm} = 1 200 Kg/cm^2 y nos queda:

2516Kg·m = 2516·100 Kg·cm

$$W_{necesario} = \frac{2516 \cdot 100\ Kg \cdot cm}{1200\ {}^{Kg}/_{cm^2}} = \frac{629}{3} cm^3 \cong 210\ cm^3$$

El uso de la calculadora nos permite observar gráficamente los puntos de mayor momento flector y su cálculo.