APLICACIÓN DE DERIVADAS: PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON 1 VARIABLE.

<table>
<tr>
<td>003</td>
<td>Un vendedor de enciclopedias recibe, como sueldo mensual, una cantidad fija de 500 € más una comisión que depende del número de enciclopedias que venda según la expresión: $100x - 0.25x^3$
(donde x representa el número de enciclopedias).
El vendedor debe de correr con sus propios gastos, y tiene unos fijos de 100 € mensuales más otros variables, que estima en 7 € por cada enciclopedia que vende. Se pide:
(a) Obtén la función que recoge el sueldo mensual del vendedor.
(b) Determina la función de gastos.
(c) Obtén la función de beneficios (sueldo menos gastos) del vendedor.
(d) ¿Cuántas enciclopedias debe vender para obtener el máximo beneficio mensual? Calcula dicho beneficio.</td>
<td>2B</td>
</tr>
</table>

MÉTODO 1: RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

RESOLUCIÓN apartado a

x: "Número de enciclopedias"

S(x): Sueldo mensual.

$$S(x) = 500 + 100x - 0.25x^3$$

RESOLUCIÓN apartado b

G(x): Gastos mensuales.

$$G(x) = 100 + 7x$$

RESOLUCIÓN apartado c

B(x): Beneficios mensuales.

$$B(x) = S(x) - G(x)$$

$$B(x) = (500 + 100x - 0.25x^3) - (100 + 7x)$$

$$B(x) = 400 + 93x - 0.25x^3$$

RESOLUCIÓN apartado d

Para que la función B(x) alcance un máximo $\rightarrow$ **B'(x) = 0**

$$B'(x) = 93 - 0.75x^2 = 0$$

$$-0'75x^2 = -93 \quad \rightarrow \quad x^2 = 124$$

$$x = \pm\sqrt{124} = 2\sqrt{31} \cong 11.14$$

$x_1 = 2\sqrt{31}$ ¿Máximo o mínimo?

$x_2 = -2\sqrt{31}$ ¿Máximo o mínimo?

Estudiamos la derivada segunda para conocer dónde se encuentra el máximo y el mínimo:

$B''(x) = -1.5x \Rightarrow B''(2\sqrt{31}) = -1.5 \cdot 2\sqrt{31} < 0$ MÁXIMO

$B''(x) = -1.5x \Rightarrow B''(-2\sqrt{31}) = -1.5\cdot(-2\sqrt{31}) > 0$ MÍNIMO

Calculamos el valor numérico de la función para **x = 11**

$$B(x) = 400 + 93x - 0.25x^3$$

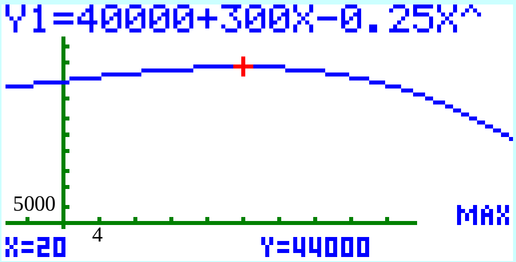
$$B(2) = 400 + 93 \cdot 11 - 0.25 \cdot 11^3$$

$$B(x) = 1090.25$$

Para obtener el máximo beneficio han de venderse mensualmente 11 enciclopedias, momento en el que el beneficio asciende a 1090.25 €.

COMPROBACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CON CALCULADORA GRÁFICA

Si representamos gráficamente la función se pueden ratificar y comprobar visualmente, de forma fácil y rápida, las conclusiones obtenidas a través del estudio analítico de la función mediante derivadas:



004	Los costes de fabricación —$C(x)$ en €— de cierta variedad de galletas dependen de la cantidad elaborada (**x** en Kg) de acuerdo con la siguiente expresión: $C(x) = 10 + 1.7\,x$ El fabricante estima que el precio de venta de cada Kg. de galletas viene dado por: $P(x) = 2 - \frac{25x^2}{100}$ en € (a) ¿El precio de venta disminuye con la cantidad? (b) Suponiendo que vende todo lo que fabrica, obtén la función que recoge todas sus ganancias. (c) ¿Qué cantidad de galletas le interesa producir para maximizar las ganancias? (d) En la situación óptima, ¿cuál es el precio de venta?, ¿qué ganancia se obtiene?	2B

MÉTODO 1: RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

RESOLUCIÓN apartado a

Para comprobar cómo se comporta el crecimiento de la función "Precio de venta" con respecto a la cantidad de Kg. estudiamos dicho crecimiento:

Para que P(x) sea estrictamente creciente → P'(x) > 0

Para que P(x) sea estrictamente decreciente → P'(x) < 0

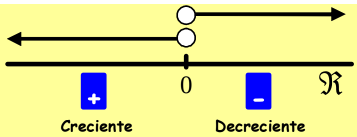
$$P(x) = 200 - \frac{25x^2}{100}$$

$$P'(x) = 0 - \frac{25}{100}\cdot 2x = \frac{-50x}{100} = \frac{-x}{2}$$

Estudiamos el signo de la derivada primera de la función:

$$\frac{-x}{2} = 0 \quad\rightarrow\quad x = 0$$

Estudiamos el signo de la función en cada uno de estos 2 intervalos que determina este valor



Como el dominio de la función es para x ≥ 0 podemos determinar que la función es estrictamente decreciente en todo su dominio.

RESOLUCIÓN apartado b

Ganancias: ***G*(x)**

Ingresos: **I(x)** = x · P (x)

Gastos o costes: ***C*(x)**

Ganancia = Ingresos - Gastos

$$G(x) = x \cdot P(x) - C(x)$$

$$G(x) = x \cdot \left(200 - \frac{25x^2}{100}\right) - (10 + 170\,x)$$

$$G(x) = 200x - \frac{25x^3}{100} - 10 - 170x$$

$$\mathbf{G(x) = 30x - \frac{25x^3}{100} - 10}$$

RESOLUCIÓN apartado c

Para que G(x) alcance un máximo ⇨ G'(x) = 0

$$G'(x) = 30 - \frac{75x^2}{100} = 0$$

$$-\frac{75x^2}{100} = -30 \quad ⇨ \quad 75x^2 = 3000 \quad \rightarrow \quad x^2 = 40$$

$$x = \sqrt{40} \cong \pm 6.32455532$$

$x_1 = \sqrt{40}$ ¿Máximo o mínimo?

$x_2 = -\sqrt{40}$ ¿Máximo o mínimo?

Estudiamos la derivada segunda:

$$G''(x) = \frac{-75 \cdot 2x}{100}.$$

$$G''(6.32455532) = \frac{-75 \cdot 2 \cdot \sqrt{40}}{100} < 0 \quad \text{MÁXIMO}$$

$$G''(-6.32455532) = \frac{-75 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{40})}{100} > 0 \quad \text{MÍNIMO}$$

La ganancia máxima se alcanzará cuando se produzcan 6.32 Kg. de galletas.

RESOLUCIÓN apartado d

$$P(x) = 200 - \frac{25x^2}{100}$$

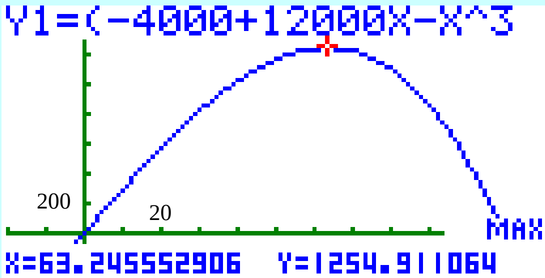
$$P(\sqrt{40}) = 200 - \frac{25 \cdot \sqrt{40}^2}{100} = 190$$

Su ganancia correspondiente será:

$$\mathbf{G(x) = 30 \cdot \sqrt{40} - \frac{25 \cdot (\sqrt{40})^3}{100} - 10 = 116.49\ €}$$

El precio de venta para la obtener una ganancia máxima será de 190€/kg, ascendiendo dicha ganancia a 116.49 €

COMPROBACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CON CALCULADORA GRÁFICA



005	Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad —**R(x)** en cientos de €— viene dada en función de la cantidad que se invierta, **x** en cientos de €, por medio de la expresión siguiente: $R(x) = -0.001 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x + 2.5$ (a) Deducir razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan. (b) ¿Qué rentabilidad obtendría en ese momento?	BH2 PAU OVIEDO Junio 1994

MÉTODO 1: RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

RESOLUCIÓN apartado a

x ≡ "Miles de € invertidos"

R(x) ≡ "Rentabilidad en miles de €".

$$R(x) = -0.001 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x + 2.5$$

Para buscar qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan habrá que observar cuándo la función R(x) alcanza un máximo.

Matemáticamente, esto sucede cuando $R'(x) = 0$

$$R'(x) = -0.002x + 0.5 = 0$$

$$-0.002x = -0.5$$

$x = 250$ (cientos) ¿máximo o mínimo?

Estudiamos la derivada segunda para conocer dónde se encuentra el máximo y el mínimo:

$R''(x) = -0.002 < 0$ **MÁXIMO**

Para obtener la máxima rentabilidad han de invertirse 25000 €

RESOLUCIÓN apartado b

Rentabilidad para x = 250

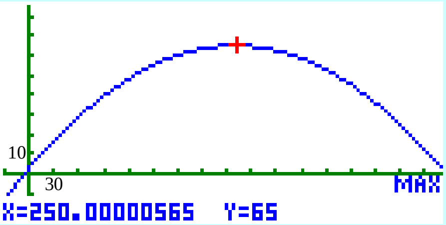
$$R(x) = -0.001 \cdot x^2 + 0.5 \cdot x + 2.5$$

$R(250) = -0.001 \cdot 250^2 + 0.5 \cdot 250 + 2.5 =$ **65 (cientos de €)**

Para obtener la máxima rentabilidad han de invertirse 25000 €, momento en el que dicha rentabilidad asciende a 6500 €.

COMPROBACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CON CALCULADORA GRÁFICA

Si representamos gráficamente la función se pueden ratificar y comprobar visualmente, de forma fácil y rápida, las conclusiones obtenidas a través del estudio analítico de la función mediante derivadas:



006	La producción de cierta hortaliza en un invernadero, **Q(x)** en Kg, depende de la temperatura, **x** en °C, según la expresión: $Q(x) = (x+1)^2 (32 - x)$ (a) Calcular razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero. (b) ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?	BH2 PAU OVIEDO J1995

MÉTODO 1: RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

RESOLUCIÓN apartado a

x ≡ "Temperatura del invernadero en °C"

Q(x) ≡ "Kilogramos de hortaliza producidos".

$$Q(x) = (x+1)^2 (32 - x)$$

Simplificamos esta expresión:

$$Q(x) = (x^2 + 1 + 2x)(32 - x) = 32x^2 + 32 + 64x - x^3 - x - 2x^2$$

$$Q(x) = -x^3 + 30x^2 + 63x + 32$$

Para que la función Q(x) alcance un máximo → $Q'(x) = 0$

$$Q'(x) = -3x^2 + 60x + 63 = 0$$

$$-x^2 + 20x + 21 = 0 \rightarrow x^2 - 20x - 21 = 0 \rightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 84}}{2} = \frac{20 \pm 22}{2}$$

$$x_1 = 21 \qquad x_2 = -1$$

$x_1 = 21$ ¿Máximo o mínimo? $x_2 = -1$ ¿Máximo o mínimo?

Estudiamos la derivada segunda para conocer dónde se encuentra el máximo y el mínimo:

$$Q''(x) = -6x + 60$$

$Q''(21) = -66 < 0$ MÁXIMO $Q''(-1) = 66 > 0$ MÍNIMO

La temperatura óptima para la máxima producción de hortaliza en el invernadero es de 21 ºC

RESOLUCIÓN apartado b

La producción de hortaliza para x = 21 será:

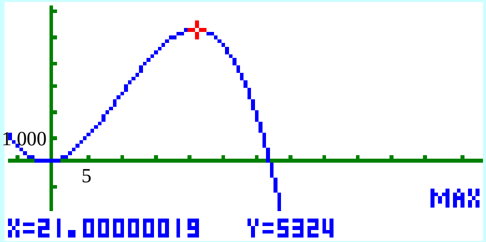
$$Q(x) = (x+1)^2\,(32 - x)$$

$$Q(21)\ \ (21+1)^2\,(32-21) = \mathbf{5324}$$

La temperatura óptima para la máxima producción de hortaliza en el invernadero es de 21 ºC, momento en el que dicha producción alcanzará los 5324 kilogramos.

COMPROBACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CON CALCULADORA GRÁFICA

Si representamos gráficamente la función se pueden ratificar y comprobar visualmente, de forma fácil y rápida, las conclusiones obtenidas a través del estudio analítico de la función mediante derivadas:



007

Se ha construido una presa de almacenamiento de agua cuyos costes de mantenimiento diarios son una función de la cantidad de agua que la misma tiene almacenada. Tales costes (en €) vienen dados por la siguiente expresión [$C(x)$ representa el coste si el volumen de agua (en millones de metros cúbicos) es x]:

$$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$$

(a) Encontrar el volumen diario de agua óptimo que debe mantenerse para minimizar costes.

(b) Calcular el coste mínimo diario que supone el mantenimiento de la instalación. Si un día la presa tiene almacenados 3 millones de metros cúbicos de agua ¿cuánto se ha gastado de más respecto del coste mínimo?

BH2

PAU OVIEDO S1998

MÉTODO 1: RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

RESOLUCIÓN apartado a

x ≡ "Volumen de agua en millones de metros cúbicos".

C(x) ≡ "€ gastados diariamente en mantenimiento".

$$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$$

Para minimizar los costes buscaremos cuándo C(x) alcanza un mínimo:

$$C'(x) = 0$$

$$C'(x) = 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 3\cdot(-8)}}{2\cdot 3} = \frac{-2 \pm 10}{6}$$

$$\mathbf{x_1 = -2 \qquad x_2 = 4/3 \cong 1.33...}$$

$x_1 = -2$ ¿Máximo o mínimo? $x_2 = 4/3$ ¿Máximo o mínimo?

Estudiamos la derivada segunda para conocer dónde se encuentra el máximo y el mínimo:

$$C''(x) = 6x + 2$$

$C''(-2) = 6\cdot(-2) + 2 = -10 < 0$ MÁXIMO

$C''(4/3) = 6\cdot(4/3) + 2 = 10 > 0$ MÍNIMO

$$1.333333333 \text{ millones de } m^3 \cong 1\,333\,333 \text{ } m^3$$

El volumen diario de agua óptimo que ha de mantenerse para que los costes sean mínimos ha de ser de aproximadamente 1 333 333 m^3

RESOLUCIÓN apartado b

El Coste para $x = 4/3$

$$C(x) = x^3 + x^2 - 8x + 73$$

$$C(4/3) = (4/3)^3 + (4/3)^2 - 8(4/3) + 73$$

$$C(x) = 66.481481481 \text{ €}$$

El volumen diario de agua óptimo que ha de mantenerse para que los costes sean mínimos ha de ser de aproximadamente 1 333 333 m^3, momento en el que los costes ascienden a 66 €.

El coste diario de mantenimiento para 3 millones de metros cúbicos de agua almacenados se verificará para $x = 3$:

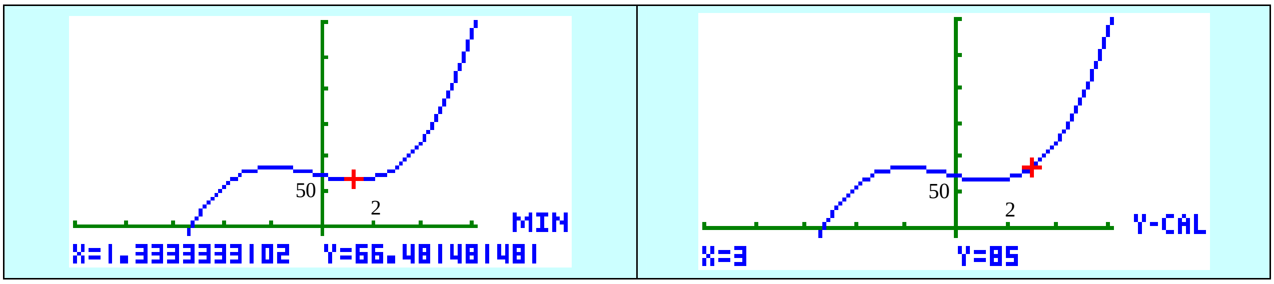
$$C(3) = 3^3 + 3^2 - 8\cdot3 + 73 = 85$$

$$C(3) - C(1.33) = 85 - 66 = 19$$

Se han gastado 19 € de más, respecto al coste mínimo

COMPROBACIÓN MEDIANTE EL ANÁLISIS GRÁFICO DE LA FUNCIÓN CON CALCULADORA GRÁFICA

Si representamos gráficamente la función se pueden ratificar y comprobar visualmente, de forma fácil y rápida, las conclusiones obtenidas a través del estudio analítico de la función mediante derivadas:



NOTA: Los resultados son un poco extraños, no muy acordes con el contexto del problema.

009	El saldo (positivo o negativo) que ha tenido durante los últimos 9 meses una de las cuentas bancarias que posee cierto individuo viene dado por la expresión (el tiempo, **x**, en meses; el saldo, **f(x)**, en decenas de €): $f(x) = 2x^3 - 27x^2 + 84x + 10 \qquad 0 \le x \le 9$ (a) Encuentra el intervalo o intervalos de tiempo en que el saldo creció, y aquél o aquéllos en que decreció. (b) ¿En qué momentos se obtuvieron el saldo más alto y el más bajo? ¿cuáles fueron estos saldos? (c) ¿Tiene la función de saldo algún punto de inflexión? Esboza un dibujo de dicha función sin detallar el valor exacto de los puntos de corte con el eje de abscisas.	BH2 COU OVIEDO J2000

MÉTODO 1: RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

RESOLUCIÓN apartado a

Para que f(x) sea estrictamente creciente → f'(x) > 0

Para que f(x) sea estrictamente decreciente → f'(x) < 0

$$f(x) = 2x^3 - 27x^2 + 84x + 10 \qquad (0 \le x \le 9)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 54x + 84$$

Estudiamos el signo de esta nueva función:

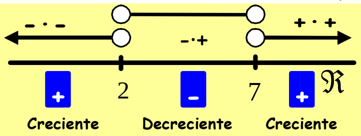
$$x = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4\cdot6\cdot84}}{2\cdot6} = \frac{54 \pm \sqrt{900}}{12} = \frac{54 \pm 30}{12} \rightarrow$$

$x_1 = 7 \quad x_2 = 2$

Estos 2 valores determinan 3 intervalos en la recta real:

$$6\cdot(x - 7)(x - 2)$$

Estudiamos el signo de la función en cada uno de estos 3 intervalos que determinan estos dos valores



Del análisis de la función mediante derivadas vemos que el valor del saldo aumenta hasta el 2º mes, a partir del cual el valor empieza a decrecer hasta llegar al 7º mes, momento en el que empieza de nuevo a crecer, hasta llegar a 9, que ya no pertenece al dominio de la función.

RESOLUCIÓN apartado b

Los momentos en los que se obtuvieron los saldos más altos y más bajos serán, respectivamente, cuando la función alcance el máximo y el mínimo.

Para que la función f(x) alcance un máximo o un mínimo: $f'(x) = 0$

$$6x^2 - 54x + 84 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = 7$$

$x_1 = 2$ ¿Máximo o mínimo? $x_2 = 7$ ¿Máximo o mínimo?

Estudiamos la derivada segunda para conocer dónde se encuentra el máximo y el mínimo:

$$f''(x) = 12x - 54$$

$f''(2) = 12\cdot2 - 54 < 0$ **MÁXIMO** en $x = 2$

$f''(7) = 12\cdot7 - 54 > 0$ **MÍNIMO** en $x = 7$

A los 2 meses el saldo es $f(2) = 2\cdot2^3 - 27\cdot2^2 + 84\cdot2 + 10 = 86$

A los 7 meses el saldo es $f(7) = 2\cdot7^3 - 27\cdot7^2 + 84\cdot7 + 10 = -39$

El saldo más alto se obtuvo a los 2 meses, momento en el que este ascendía a 860 € y el más bajo a los 7 meses, con un saldo negativo de 390 €.

RESOLUCIÓN apartado c

Para que la función tenga un punto de inflexión:

$$f''(x) = 0 \text{ y } f'''(x) \neq 0$$

$f''(x) = 12x - 54 = 0 \rightarrow 12x = 54 \rightarrow x = 4.5$

$$f'''(x) = 12 \neq 0$$

La función de saldo presenta un punto de inflexión para x = 4.5

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Con los datos obtenidos hasta el momento, y ayudándonos de algún punto más a través de una sencilla tabla de valores, obtendríamos un ESBOZO de gráfica como la que sigue:

x	y
0	10
1	69
2	86
6	- 26
7	- 39
8	- 22
9	37