APLICACIÓN DE DERIVADAS: PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON 2 VARIABLES.

003	Descompón el número 9 en dos sumandos x e y, tales que la suma $x^2 + 6y$ sea mínima.	2B

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS

$x \equiv$ "Primer número buscado"

$y \equiv$ "Segundo número buscado"

FUNCIÓN A OPTIMIZAR

$$A(x, y) = x^2 + 6y$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de uno de los datos del problema:

$$x + y = 9 \quad \rightarrow \quad y = 9 - x$$

$$A(x) = x^2 + 6(9 - x)$$

$$\mathbf{A(x) = x^2 + 54 - 6x}$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÍNIMO

(a) Para que exista un mínimo $A'(x) = 0$

Para que A(x) sea un valor mínimo, la primera condición será:

$$A'(x) = 0$$

$$A'(x) = 2x - 6 = 0$$

$$2x = 6 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

¿máximo o mínimo?

(b) Para que exista un mínimo $A''(x) > 0$

$A''(x) = 2 > 0 \quad \rightarrow$ Mínimo

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$$y = 9 - x \quad \rightarrow \quad y = 9 - x$$

$$y = 9 - 3 = 6$$

$$\mathbf{x = 3 \quad \rightarrow \quad y = 6}$$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Los 2 números que verifican que la condición del enunciado sea mínima son el 3 y el 6.

004	Determina dos números cuya suma sea 24 y tales que el producto del uno por el cubo del otro sea máximo. Razonar el método utilizado.	2B

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS

$x \equiv$ "Primer número buscado"

$y \equiv$ "Segundo número buscado"

FUNCIÓN A OPTIMIZAR

$$A(x, y) = x \cdot y^3$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de uno de los datos del problema:

$$x + y = 24 \quad \rightarrow \quad x = 24 - y$$

$$A(y) = (24 - y) \cdot y^3$$

$$\mathbf{A(y) = 24y^3 - y^4}$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÁXIMO

(a) Para que exista un máximo $A'(y) = 0$

$$A'(y) = 72y^2 - 4y^3 = 0$$

$$4y^2 \cdot (18 - y) = 0$$

$y_1 = 0$ ¿máximo o mínimo? $y_2 = 18$ ¿máximo o mínimo?

(b) Para que exista un máximo $A''(y) < 0$

$A''(y) = 144y - 12y^2$

$A''(0) = 144 \cdot 0 - 12 \cdot 0^2 = 0$

$A''(18) = 144 \cdot 18 - 12 \cdot 18^2 = 2592 - 3888 = -1296 < 0 \quad \rightarrow \quad$ Máximo

$$\mathbf{y = 18}$$

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$x = 24 - y = 24 - 18$

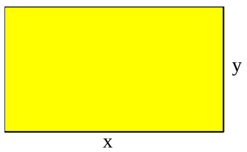
$$\mathbf{x = 6}$$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Los 2 números que verifican que la condición del enunciado sea máxima son el 6 y el 18.

009	Si tenemos una cuerda de 100 cm de larga, ¿cuáles serían las dimensiones del rectángulo para que tenga área máxima?	2B

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS



DETERMINACIÓN DE VARIABLES

x: longitud, en cm, de la base.

y: longitud, en cm, de la altura.

FUNCIÓN A OPTIMIZAR

$$A(x, y) = x \cdot y$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de uno de los datos del problema:

$$2x + 2y = 100 \quad \rightarrow \quad 2x = 100 - 2y$$

$$x = 50 - y$$

$$A(y) = (50 - y) \cdot y$$

$$\mathbf{A(y) = 50y - y^2}$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÁXIMO

(a) Para que exista un máximo $A'(y) = 0$

$$A'(y) = 50 - 2y = 0$$

$$-2y = -50 \quad \rightarrow \quad 2y = 50$$

$$y = 25 \quad \text{¿máximo o mínimo?}$$

(b) Para que exista un máximo $A''(y) < 0$

$A''(y) = -2 < 0$ Máximo

$$\mathbf{y = 25}$$

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$x = 50 - y = 50 - 25 = 25$

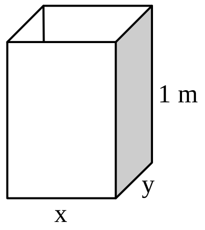
$$\mathbf{x = 25}$$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Las dimensiones para que tenga área máxima serán las que formen un cuadrado de 25 cm de lado.

014	Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m^3, su altura de 1 m y el coste de construcción por m^2 es de 30 euros para la base, 35 euros para la tapa y 20 euros para cada pared lateral.	2B

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS



DETERMINACIÓN DE VARIABLES

x: longitud en m de la arista de la base.

y: longitud en m de la otra arista de base.

$$S_{Base} = x \cdot y$$

$$S_{Lateral} = y \cdot 1 + x \cdot 1 + y \cdot 1 + x \cdot 1 = 2x + 2y$$

$$S_{Tapa} = x \cdot y$$

FUNCIÓN A OPTIMIZAR

$$\text{Precio Total} = 30xy + 35xy + 20(2x + 2y)$$

$$P(x, y) = 30xy + 35xy + 40x + 40y$$

$$P(x, y) = 65xy + 40x + 40y$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de uno de los datos del problema:

$$\text{Volumen} = x \cdot y \cdot 1$$

$$9 = x \cdot y$$

$$y = \frac{9}{x}$$

$$P(x) = 65x\frac{9}{x} + 40x + 40\frac{9}{x}$$

$$P(x) = 585 + 40x + \frac{360}{x}$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÍNIMO

(a) Para que exista un mínimo $P'(x) = 0$

$$P'(x) = 40 - \frac{360}{x^2}$$

$$40 - \frac{360}{x^2} = 0 \rightarrow 40x^2 - 360 = 0 \rightarrow 40x^2 = 360 \rightarrow x^2 = 9$$

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 3$$

Se desecha x_1 por ser un valor negativo y no existir distancias negativas.

x = 3 ¿máximo o mínimo?

(b) Para que exista un mínimo $P''(x) > 0$

$$P'(x) = 40 - \frac{360}{x^2}$$

$$P''(x) = \frac{360}{x^4} \cdot 2x = \frac{720}{x^3}$$

$P''(3) = \frac{720}{3^3} > 0 \rightarrow$ Mínimo

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

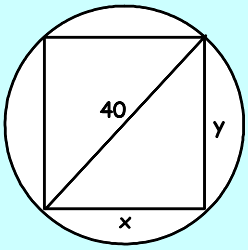
$$y = \frac{9}{x} = \frac{9}{3} = 3$$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro serán aquellas cuya base forma un cuadrado de lado 3 m.

020	Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.	2B

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS



DETERMINACIÓN DE VARIABLES

x: longitud en cm de uno de los lados señalados en la figura.

y: longitud en cm de otro de los lados señalados en la figura.

FUNCIÓN A OPTIMIZAR

$$S(x, y) = x \cdot y$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de otro de los datos del problema, teniendo en cuenta que el diámetro mide 40 cm.

$$40^2 = x^2 + y^2$$

$$y^2 = 40^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{1600 - x^2}$$

El área del rectángulo será:

$$S(x) = x \cdot \sqrt{1600 - x^2}$$

Hacemos la derivada primera y simplificamos la expresión resultante:

$$S'(x) = 1 \cdot \sqrt{1600 - x^2} + x \, \frac{-2x}{2\sqrt{1600 - x^2}}$$

$$S'(x) = \sqrt{1600 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1600 - x^2}}$$

$$S'(x) = \frac{(1600 - x^2) - x^2}{\sqrt{1600 - x^2}} = \frac{1600 - 2x^2}{\sqrt{1600 - x^2}}$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÁXIMO

(a) $S'(x) = 0$

$$\frac{1600 - 2x^2}{\sqrt{1600 - x^2}} = 0$$

$$1600 - 2x^2 = 0 \rightarrow 2x^2 = 1600 \rightarrow x^2 = 800$$

$$x = \sqrt{10^2 \cdot 2^3} = 20\sqrt{2}$$

(b) Para que exista un máximo $S''(x) < 0$

$$S'(x) = \frac{1600 - 2x^2}{\sqrt{1600 - x^2}} \rightarrow S''(x) = \frac{-4x\sqrt{1600 - x^2} + (600 - 2x^2)\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1600 - x^2}}}{1600 - x^2} =$$

$$S''(x) = \frac{-4x\sqrt{1600 - x^2} - \frac{1200x + 4x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}}}{1600 - x^2} =$$

$$S''(x) = \frac{-\frac{-4x\sqrt{1600 - x^2}\cdot 2\sqrt{1600 - x^2} - 1200x - 4x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}}}{1600 - x^2}$$

$$S''(x) = \frac{-8x\cdot(1600 - x^2) - 1200x - 4x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}\cdot(1600 - x^2)} = \frac{-12800x + 8x^3 - 1200x - 4x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}\cdot(1600 - x^2)}$$

$$S''(x) = \frac{-14000x + 8x^3 - 1200x - 4x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}\cdot(1600 - x^2)}$$

$S''(20\sqrt{2}) = \dfrac{-14000x + 8x^3 - 1200x - 4x^2}{2\sqrt{1600 - x^2}\cdot(1600 - x^2)} < 0 \rightarrow$ Se trata de un MÁXIMO

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$$x = \sqrt{10^2 \cdot 2^3} = 20\sqrt{2}$$

$$y = \sqrt{1600 - (20\sqrt{2})^2} =$$

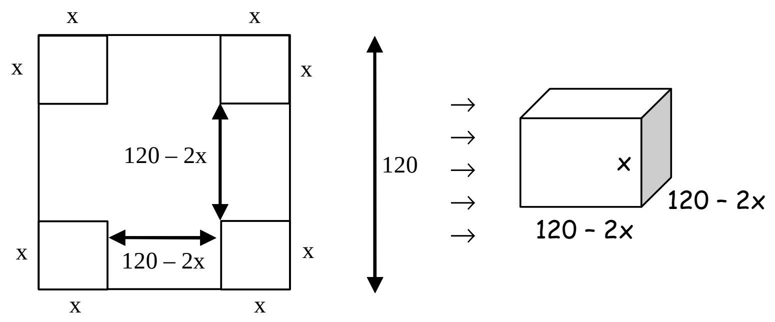
$$\sqrt{1600 - 400 \cdot 2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Las dimensiones serían las de un cuadrado de lado 20 $\sqrt{2}$ cm.

024	Se dispone de un trozo cuadrado de cartón cuyo lado mide 120 cm. De sus esquinas se quitan cuatro cuadrados iguales para hacer con el cartón restante una caja sin tapa, cuyo volumen se quiere maximizar. Calcula las dimensiones de la caja que verifica dichas condiciones.	2BC PAU PVasco J2003

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS



FUNCIÓN A OPTIMIZAR

$$V(x) = (120 - 2x)^2 \cdot x$$

$$V(x) = (14400 + 4x^2 - 480x) \cdot x$$

$$V(x) = 14400x + 4x^3 - 480x^2$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÁXIMO

(a) $V'(x) = 0$

$$V'(x) = 14400 + 12x^2 - 960x$$

$$12x^2 - 960x + 14400 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$x_1 = 60$ Se desecha pues no habría caja

$x_2 = 20$ ¿máximo o mínimo?

(b) Para que exista un máximo $V''(x) < 0$

Vamos a determinar cuál de los 2 valores es un máximo:

$$V''(x) = 24x - 960$$

$V''(20) = 24 \cdot 20 - 960 = -480 < 0$ ⇨ Máximo.

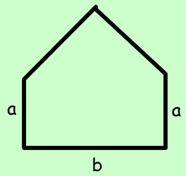
DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$x = 20$

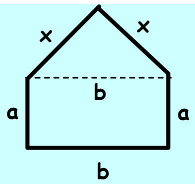
$120 - 2x = 120 - 40 = 80$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Las dimensiones de la caja que verifican las condiciones del enunciado son 80 cm de lado de la base y 20 cm de altura.

031	El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90 grados. Calcula la longitud de los lados "a" y "b" para que el área de la ventana sea máxima.		2B PAU Castilla La Mancha J2003

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS



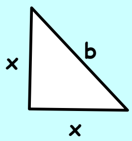
DETERMINACIÓN DE VARIABLES

x: longitud, en m, de los lados señalados en la figura.

FUNCIÓN A OPTIMIZAR

S = Área del triángulo + Área del rectángulo.

En el triángulo rectángulo:



$$b^2 = x^2 + x^2$$
$$b^2 = 2x^2$$
$$x = \sqrt{\frac{b^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{b\cdot\sqrt{2}}{2}$$

El área del triángulo será:

$$A_{\text{Triángulo}} = \frac{x\cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{b^2\cdot\sqrt{2}^2}{2^2\cdot 2} = \frac{b^2\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{b^2}{4}$$

El área del rectángulo será:

$$A_{\text{Rectángulo}} = a\cdot b$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de otro de los datos del problema, teniendo en cuenta que el perímetro mide 6

$$a + b + a + x + x = 6$$
$$2a + b + 2x = 6$$
$$2a + b + 2\,\frac{b\cdot\sqrt{2}}{2} = 6$$
$$2a + b + b\sqrt{2} = 6$$
$$2a + b(1 + \sqrt{2}) = 6$$
$$a = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$$

Hacemos las operaciones correspondientes:

$$S_{\text{Total}} = \text{Área del triángulo} + \text{Área del rectángulo.}$$
$$S(b) = \frac{b^2}{4} + a\cdot b$$
$$S(b) = \frac{b^2}{4} + \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}\cdot b$$
$$S(b) = \frac{b^2 + 12b - 2b^2(1+\sqrt{2})}{4}$$
$$S(b) = \frac{b^2 + 12b - 2b^2 - 2b^2\sqrt{2}}{4}$$
$$S(b) = \frac{12b - b^2 - 2b^2\sqrt{2}}{4}$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÁXIMO

(a) S'(b) = 0

$$S'(b) = \frac{12 - 2b - 4b\sqrt{2}}{4} = 0$$
$$12 - 2b - 4b\sqrt{2} = 0$$

$$6 - b - 2b\sqrt{2} = 0$$
$$-6 + b + 2b\sqrt{2} = 0$$
$$b + 2b\sqrt{2} = 6$$
$$b(1 + 2\sqrt{2}) = 6$$
$$b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}} \quad \text{¿Máximo o mínimo?}$$

(b) $S''(b) < 0$

$$S'(b) = \frac{12-2b-4b\sqrt{2}}{4} \rightarrow S''(b) = \frac{-2-4\sqrt{2}}{4} < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$$a = \frac{6-b(1+\sqrt{2})}{2} = \frac{6-\frac{6}{1+2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})}{2} =$$

$$= \frac{6-\frac{6(1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{6\cdot(1+2\sqrt{2})-6(1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{6+12\sqrt{2}-6-6\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}}{2} =$$

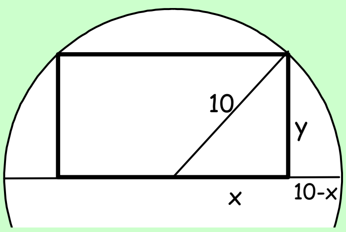
$$= \frac{6\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} : 2 = \frac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Las longitudes de los lados "a" y "b" para que el área de la ventana sea máxima serán, respectivamente $\frac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$ m y $\frac{6}{1+2\sqrt{2}}$ m

033	En un jardín existe un paseo cerrado que consta de media circunferencia de radio 10 m y de su diámetro correspondiente. En el interior de la figura anterior se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. El parterre se plantará de camelias, que ocupan 0.25 m^2 cada una. ¿Cuál es el número máximo de plantas que pueden ubicarse?	2B

RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS



$$S(x, y) = 2x \cdot y$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de otro de los datos del problema:

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 100 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{100-x^2}$$

Se desecha la solución negativa ya que las distancias son positivas.

$$S(x) = 2x \cdot \sqrt{100-x^2}$$

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÁXIMO

(a) $S'(x) = 0$

$$S'(x) = 2\sqrt{100-x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$S'(x) = \frac{2(100-x^2)-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{200-2x^2-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0$$

$$200 - 4x^2 = 0$$

$$-4x^2 = -200 \rightarrow x^2 = 50 \rightarrow x = \pm\sqrt{50} = \pm 5\sqrt{2}$$

$x_1 = -5\sqrt{2}$ (Desechada. Las distancias son positivas)

$x_2 = 5\sqrt{2}$ ¿Máximo o mínimo?

(b) Para que exista un máximo $S''(x) < 0$

$$S'(x) = \frac{200-4x^2}{\sqrt{100-x^2}} \rightarrow S''(x) = \frac{-8x\sqrt{100-x^2} - (200-4x^2)\cdot\frac{-2x}{\sqrt{100-x^2}}}{(\sqrt{100-x^2})^2} =$$

$$= \frac{-8x\sqrt{100-x^2} - \frac{-400x+8x^3}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2} = \frac{\frac{-8x(100-x^2)+400x-8x^3}{\sqrt{100-x^2}}}{100-x^2} = \frac{-800x+8x^3+400x-8x^3}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}$$

$$S''(x) = \frac{-400x}{(100-x^2)\sqrt{100-x^2}}$$

$S''(5\sqrt{2}) < 0 \rightarrow$ Máximo

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$$y = \sqrt{100-(5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100-50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

SOLUCIÓN

$S = 2x \cdot y = 2\cdot 5\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2} = 100\ m^2$

100 : 0.25 = 400 camelias

ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

El número máximo de plantas que pueden ubicarse será de 400 camelias.

039	Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y = -x^2 + 4$ y la recta $y = 1$. (a) Represente gráficamente la chapa y calcule su área. (b) Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$.	2BC PAU Oviedo S2008

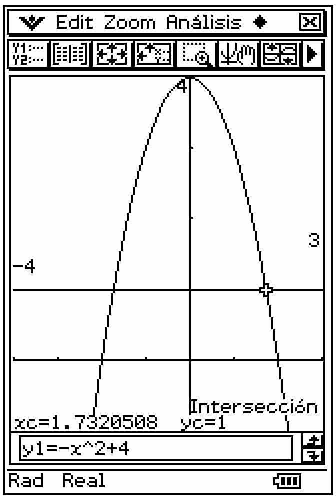
RESOLUCIÓN MEDIANTE EL ESTUDIO LOCAL DE FUNCIONES A TRAVÉS DE DERIVADAS

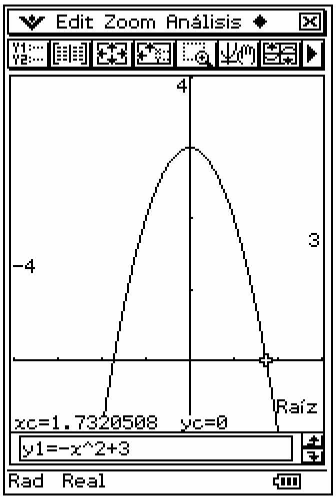
- Representamos la parábola calculando el vértice y con una sencilla tabla de valores:

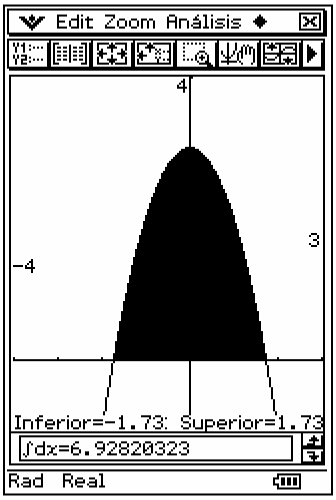
$y' = -2x = 0 \rightarrow y = 0$

Representamos la recta $y = 1$

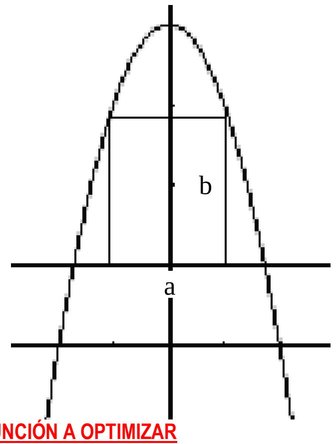
Este apartado lo resolveremos una vez tengamos los conocimientos suficientes para el cálculo de integrales definidas. Con calculadora gráfica sería:







Resolución apartado (b)



DETERMINACIÓN DE VARIABLES

a: unidades de longitud de la base del rectángulo.

b: unidades de longitud de la altura del rectángulo.

Base: La longitud "**a**" será $2x$

Altura: La longitud "**b**" será $y - 1$

FUNCIÓN A OPTIMIZAR

$$A(a, b) = a \cdot b$$

$$A = 2x \cdot (y - 1)$$

Vamos a colocar la función a optimizar en función de una sola variable, para lo que nos auxiliamos de uno de los datos del problema:

Los puntos tienen que pertenecer a la parábola $y = - x^2 + 4$

$$A = 2x \cdot (y - 1)$$

$$A = 2x \cdot (- x^2 + 4 - 1)$$

$$A = 2x \cdot (- x^2 + 3) = - 2x^3 + 6x$$

A(x) =

CONDICIONES PARA QUE EXISTA UN MÁXIMO

(a) $A'(x) = 0$

$$A'(x) = - 6x^2 + 6 = 0$$

$$- 6x^2 = - 6 \rightarrow 6x^2 = 6 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

Para comprobar que realmente es un máximo, estudiamos la derivada segunda en $x = 1$

$$A''(x) = - 12x$$

$$A''(1) = - 12 < 0 \rightarrow \text{Máximo}$$

DETERMINACIÓN DEL VALOR DEL RESTO DE INCÓGNITAS

$$x = 1 \rightarrow y = - x^2 + 4 \rightarrow y = - 1 + 4 = 3$$

El máximo se obtendrá cuando esté en el punto (1, 3)

Base: La longitud "a" será $2x \rightarrow 2 \cdot 1 = 2$

Altura: La longitud "b" será $y - 1 \rightarrow 3 - 1 = 2$

SOLUCIÓN Y ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

Las dimensiones de dicho rectángulo con las condiciones del enunciado serán un cuadrado de lado 2 u.l.