MATRICES. MATRIZ INVERSA. DETERMINANTES.

006	Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcular razonadamente las raíces de la ecuación polinómica. Enunciar las propiedades utilizadas. $$P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$	2BC PAU S1996 Oviedo

RESOLUCIÓN apartado (i)

Al sumar filas o columnas en una matriz, su determinante no varía. A la primera columna le sumamos la 2ª, 3ª y 4ª columnas:

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Si los elementos de una línea de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

$$(x + 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Para calcular el determinante aplicamos la regla de Chio basada en las propiedades de los determinantes.

☞ Al cambiar entre sí dos filas o dos columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

☞ Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela, su determinante no varía.

☞ Si a una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela multiplicada por un número, su determinante queda multiplicado por ese número

Aplicando estas propiedades obtenemos un determinante con una fila o columna cuyos elementos son todos nulos menos uno. Ahora calculamos el determinante por los adjuntos de esa fila o columna precedidos del elemento y su signo. Como todos los elementos son nulos, menos uno, el determinante será igual a este elemento por su adjunto y por su signo:

$$(-1)^{\text{nº de fila + nº de columna}}$$

Fijamos la primera fila y hacemos ceros en la primera columna, multiplicando esta primera fila por (–1) y sumándole, sucesivamente, las otras filas:

$$= (x + 3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Con esto facilitamos el **desarrollo del determinante a partir de los adjuntos de la primera columna**. Como todos los elementos son nulos, excepto el primero, el determinante es igual a:

$$(x + 3)\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicamos sucesivamente la regla de Chío:

$$(x + 3)\cdot(x - 1)\cdot \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x + 3)\cdot(x - 1)\cdot(x-1)\begin{vmatrix} x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x + 3)\cdot(x - 1)\cdot(x-1)(x - 1) = 0$$

$$(x + 3)\cdot(x - 1)^3 = 0$$

Las raíces de la ecuación serán:

x = – 3 y x = 1

008	(i) Si A es una matriz tal que $A^2 = I$, ¿se deduce que $A = I$? En caso afirmativo, probarlo, y en caso negativo, proponer un ejemplo aclaratorio. (ii) Si $A^3 = I$, demostrar que A es invertible, y calcular, en función de A, su inversa. (iii) Probar que si $A\cdot B = A$ y $B\cdot A = B$, entonces $A^2 = A$. (I es la matriz unidad)	2BC PAU S1997 Oviedo

RESOLUCIÓN apartado (i)

Suponiendo que la matriz A tenga inversa:

$$A\cdot A = I$$
$$A^{-1}\cdot A\cdot A = A^{-1}\cdot I$$
$$I\cdot A = A^{-1}\cdot I$$
$$A = A^{-1}$$

Si la **matriz A^2 es igual a la matriz identidad**, lo que se deduce es que la matriz A es igual que su inversa.

(I) Para reforzar que el enunciado no es cierto simplemente colocamos un contraejemplo:

$$A = - I$$
$$A^2 = (- I)(- I)$$
$$A^2 = I$$

y sin embargo $A \neq I$

AMPLIACIÓN LABORIOSA, por si a alguien se le ha ocurrido resolverlo e esta forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tras el producto A^2 es:

$$\begin{pmatrix} a^2+b\cdot c & a\cdot b+b\cdot d \\ a\cdot c+d\cdot c & c\cdot b+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la definición de igualdad de matrices:

$$\left.\begin{array}{r} a^2+b\cdot c=1 \\ a\cdot c+d\cdot c=0 \\ a\cdot b+b\cdot d=0 \\ c\cdot b+d^2=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a^2+b\cdot c=1 \\ c\cdot(a+d)=0 \\ b\cdot(a+d)=0 \\ c\cdot b+d^2=1 \end{array}\right\}$$

De este sistema se obtienen muy diversas soluciones, siendo un tanto largo de resolver

Así pues, proponemos algunas soluciones, a través de la observación de dicho sistema:

$$c\cdot(a+d) = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{c = 0} \;\Rightarrow\; a^2 + 0\cdot 0 = 1 \;\rightarrow\; \mathbf{a = +1\ ;\ a = -1}$$

$$b\cdot(a+d) = 0 \;\rightarrow\; \mathbf{b = 0}$$

$$\mathbf{cb + d^2 = 1 \;\rightarrow\; 0 + d^2 = 1 \;\rightarrow\; d = \pm 1}$$

Por tanto, algunas matrices que cumplen esta condición son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a comprobar si $A = A^{-1}$ en estos 2 casos:

CASO I) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (-1) \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow A = A^{-1} \qquad c.s.q.d.$$

CASO II) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix}(-1)\\(1)\end{matrix}\left(\begin{array}{cc|cc}-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-1&0\\0&1&0&1\end{array}\right) \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} \rightarrow A = A^{-1} \quad \text{c.s.q.d.}$$

RESOLUCIÓN apartado (ii)

$$A^3 = I$$

$$A \cdot A^2 = I$$

Como $A \cdot A^{-1} = I$

$$A \cdot A^2 = A \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1}\, A \cdot A^2 = A^{-1}\, A \cdot A^{-1}$$

$$A^2 = A^{-1}$$

La matriz tiene inversa y ésta es A^2

RESOLUCIÓN apartado (iii)

$$A^2 = A \cdot A$$

Sustituimos A por su valor $A \cdot B$

$$A^2 = AB \cdot AB$$

$$A^2 = A\,B \cdot A\,B$$

Sustituimos $B \cdot A$ por su valor, $B \cdot A = B$

$$A^2 = A\,B\,B$$

Sustituimos $A \cdot B$ por su valor, $A \cdot B = A$

$$A^2 = A\,B$$

$A^2 = A$ c.s.q.d.

012	Sea A = $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&b\end{pmatrix}$ (i) ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real? (ii) Calcular la inversa de A cuando exista. (iii) Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.	2BC PAU J1999 Oviedo

RESOLUCIÓN apartado (i)

$$|A| = \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\a&0&b\end{vmatrix} = \text{sen } k$$

sen K

Desarrollamos el determinante con la ayuda de la regla de Sarrus:

$$|A| = b + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$b = \text{sen } K$$

El seno de un ángulo oscila entre – 1 y 1

$$-1 \le \text{sen } k \le 1$$

$$-1 \le b \le 1$$

$$-1 \le |A| \le 1$$

El determinante de A será el seno de algún número real cuando su elemento $a_{33} \in [-1, 1] \rightarrow -1 \le b \le 1$

RESOLUCIÓN apartado (ii)

MÉTODO I

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$$

$|A| = b \neq 0 \rightarrow \exists\, A^{-1}$ siempre que $b \neq 0$

Un método para calcular la matriz inversa es aplicar está expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^{t}$$

Averiguamos los menores complementarios:

$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b$	$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$	$\alpha_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix} = -a$
$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = 0$	$\alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = b$	$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$	$\alpha_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$	$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Averiguamos los adjuntos de los elementos

$A_{11} = b$	$A_{12} = 0$	$A_{13} = -a$
$A_{21} = 0$	$A_{22} = b$	$A_{23} = 0$
$A_{31} = 0$	$A_{32} = 0$	$A_{33} = 1$

$$Adj\,(A) = \begin{pmatrix} b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[Adj\,(A)]^{t} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^{t}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad \textbf{siendo } \mathbf{b \neq 0}$$

MÉTODO II

Calculamos la inversa por el método de Gauss – Jordan

Fijamos la 1ª y 2ª filas y realizamos las operaciones indicadas a la izquierda:

$$\begin{array}{c} -a) \\ \\ 1) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fijamos la 1ª y 2ª filas y realizamos las operaciones indicadas a la izquierda:

$$\begin{array}{c} \\ \\ 1/b \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & -a & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a/b & 0 & 1/b \end{array}\right)$$

La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad \textbf{siendo } b \neq 0$$

RESOLUCIÓN apartado (iii)

Para que A coincida con su inversa:

$$A = A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-a}{b} & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

Aplicando la definición de igualdad de matrices:

Estudiamos la igualdad en los elemento a_{31} y a_{33} de las matrices:

$a_{31} \rightarrow \quad a = \frac{-a}{b} \quad \rightarrow \quad a \cdot b = -a \quad \rightarrow \quad a \cdot b + a = 0$

$a_{33} \rightarrow \quad b = \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \pm\sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = \pm 1}$

Para b = 1 $\rightarrow$ $a \cdot b + a = 0 \rightarrow a + a = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0$

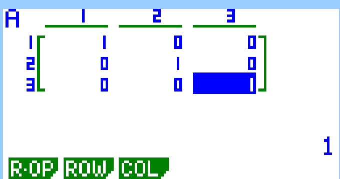
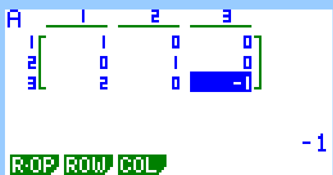
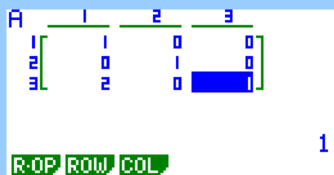
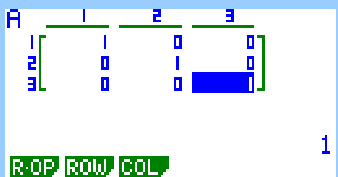
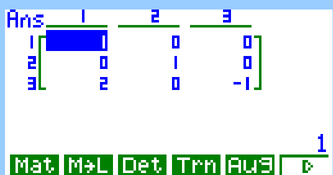
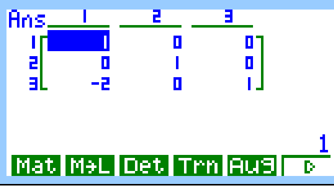
Para b = - 1 $\rightarrow$ $a \cdot b + a = 0 \rightarrow -a + a = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ infinitas soluciones $\rightarrow a = a$

Por lo tanto sólo puede ser $b = 1$ ó $b = -1$.

En resumen, las dos condiciones anteriores se verifican simultáneamente, cuando $a = 0, b = 1$ ó $a \in R, b = -1$

(0, 1) (a, - 1)

COMPROBACIÓN DE ESTOS RESULTADOS UTILIZANDO COMO HERRAMIENTA UNA CALCULADORA GRÁFICA U OTRA CON CAPACIDAD MATRICIAL

Para $a = 0$ $b = 1$	($a \in R, b = -1$) Por eje:	Para cualesquiera otros valores, no se verifica
	a = 2 b = - 1	**a = 2 b = 1**
Matriz A 	**Matriz A** 	**Matriz A** 
Matriz A^{-1} 	**Matriz A^{-1}** 	**Matriz A^{-1}** 

017	Sea la ecuación matricial ABA = C. (a) ¿Qué orden tiene la matriz solución B? (b) Resuelve la ecuación cuando $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2BC PAU S2001 Oviedo

RESOLUCIÓN apartado (a)

(a) Para que dos matrices se puedan multiplicar es condición necesaria que el número de columnas de la matriz multiplicando sea igual al número de filas de la matriz multiplicadora.

Tienen que ser iguales

m x n   n x p

(b) El producto de matrices no posee la propiedad conmutativa

A · B · A

m x n   a x b   m x n

Dimensión matriz resultante

m x n

Para que se pueda realizar este producto ha de verificarse:

n = a

b = m

Si A tiene de dimensiones mxn, la matriz B ha de tener de dimensión nxm

RESOLUCIÓN apartado (b)

$A \cdot B \cdot A = C$

MÉTODO I

$$A \cdot B \cdot A = C$$
$$A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A = A^{-1} \cdot C$$
$$B \cdot A = A^{-1} \cdot C$$
$$B \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$$
$$B = A^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Un método para calcular la matriz inversa es aplicar está expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$$

Averiguamos los menores complementarios y los adjuntos de los elementos:

$\alpha_{11} = 1 \rightarrow A_{11} = 1$	$\alpha_{12} = 2 \rightarrow A_{12} = -2$
$\alpha_{21} = 0 \rightarrow A_{21} = 0$	$\alpha_{22} = 1 \rightarrow A_{22} = 1$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} \cdot C \cdot A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

MÉTODO II (

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=$$

Multiplicamos las matrices:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}a & b\\ 2a+c & 2b+d\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)\cdot A=\begin{pmatrix}a & b\\ 2a+c & 2b+d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=$$

Multiplicamos las matrices:

$$(A\cdot B)\cdot A=\begin{pmatrix}a+2b & b\\ 2a+c+4b+2d & 2b+d\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)\cdot A = C$$

$$\begin{pmatrix}a+2b & b\\ 2a+c+4b+2d & 2b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Aplicamos la definición de igualdad de matrices:

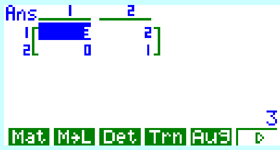
$$\begin{cases}a+2b=3\\ b=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=3-2b=3-4=-1\\ b=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}2a+c+4b+2d=0\\ 2b+d=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-2+c+8+2d=0\\ 4+d=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=2-8-2d\\ d=-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}c=0\\ d=-3\end{cases}$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

COMPROBACIÓN MEDIANTE LA CALCULADORA GRÁFICA

Introducimos los valores hallados de las matrices A y B



Obtenemos la matriz C, como se quería demostrar