MATRICES. MATRIZ INVERSA. DETERMINANTES.

001

(a) Define rango de una matriz.

(b) Una matriz de tres filas y tres columnas tiene rango tres, ¿cómo varía el rango si quitamos una columna? Si suprimimos una fila y una columna, ¿podemos asegurar que el rango de la matriz resultante valdrá dos? Razona las respuestas.

2BC PAU J1994 Oviedo

002

Dada la ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$ se pide:

(a) Razona que es polinómica de grado ≤ 3.

(b) Obtener, sin desarrollar el determinante, sus soluciones. Razonar las respuestas.

2BC PAU S1994 Oviedo

003

(a) Producto de matrices: definición, condiciones para su realización. Si $A \in M_{mxn}$ (matriz de "m" filas y "n" columnas), $B \in M_{nxp}$ y $C \in M_{qxr}$, ¿qué condiciones deben de cumplir p, q y r para que las operaciones que se indican a continuación puedan ser efectuadas y cuál es el orden de la matriz resultante?

(a1) $A \cdot C \cdot B$ (a2) $A \cdot (B+C)$

(b) Siendo

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot B$$

con A y B matrices cuadradas de orden 2, ¿debe ser necesariamente A = B?

2BC PAU J1995 Oviedo

004

(i) Definir rango de una matriz explicando cada concepto que interviene en la definición.

(ii) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyo rango es 2, ¿se alterará el rango de dicha matriz si a los elementos de una de sus columnas se les suman los correspondientes de otra de sus columnas? Razona la respuesta.

2BC PAU S1995 Oviedo

005

Aplicando propiedades de los determinantes (y sin desarrollar ni aplicar la regla de Sarrus) responder razonadamente a las siguientes preguntas:

(i) ¿Cómo variará el determinante de una matriz de orden 3 sí se multiplica cada elemento a_{ij} de la matriz por la expresión 2^{i-j} ?

(ii) ¿La matriz, de orden 4, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$, tiene inversa?

(a_{ij} es el elemento de la matriz A, perteneciente a la fila "i" y columna "j")

2BC PAU J1996 Oviedo

006

Aplicando las propiedades de los determinantes y sin utilizar la regla de Sarrus, calcular razonadamente las raíces de la ecuación polinómica. Enunciar las propiedades utilizadas.

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

2BC PAU S1996 Oviedo

007

Dadas las matrices:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & k \end{pmatrix}$$

(i) Averiguar para qué valores de *k* existe alguna matriz P que cumpla: $N = P \cdot M$

(ii) ¿Tiene sentido hablar de la existencia de la matriz inversa de $M \cdot N^t$, para todo $k \in R$? Si existe para k = 0, hallarla. (N^t = traspuesta de N).

2BC PAU J1997 Oviedo

008

(i) Si A es una matriz tal que $A^2 = I$, ¿se deduce que A = I? En caso afirmativo, probarlo, y en caso negativo, proponer un ejemplo aclaratorio.

(ii) Si $A^3 = I$, demostrar que A es inversible, y calcular, en función de A, su inversa.

(iii) Probar que si $A \cdot B = A$ y $B \cdot A = B$, entonces $A^2 = A$.

(I es la matriz unidad)

2BC PAU S1997 Oviedo

009

Dada la identidad matricial $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(i) ¿Cuáles son las dimensiones de una matriz solución de la identidad anterior?

(ii) Calcular su solución.

(iii) ¿Es única la solución? Razona las respuestas.

2BC PAU J1998 Oviedo

010

(i) Define matriz triangular superior y calcula su determinante

(ii) Hallar todas las matrices triangulares superiores, de orden dos, que verifican que su cuadrado es la matriz identidad.

2BC PAU S1998 Oviedo

011

(i) Determina una matriz A para que el sistema homogéneo $A \cdot X = 0$ sea equivalente a la ecuación matricial:

$$(x,\ y,\ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (0,\ 0)$$

(ii) Calcula las soluciones de módulo uno. Justifica las respuestas.

2BC PAU J1999 Oviedo

012

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$

(i) ¿Cuándo el determinante de A es el seno de algún número real?

(ii) Calcular la inversa de A cuando exista.

(iii) Determina todos los pares (a, b) para los que A coincide con su inversa.

2BC PAU J1999 Oviedo

013

Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & 2 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ donde λ es un número real.

(i) Halla los valores de λ para los cuales A no tiene inversa.

(ii) Calcula el valor de $b \in R$ para el que la matriz $b \cdot A$ tiene determinante 1.

2BC PAU S1999 Oviedo

014

(i) Calcula todas las matrices diagonales de orden dos que coincidan con su inversa.

(ii) Si A es una de esas matrices, calcula su cuadrado.

2BC PAU J2000 Oviedo

015

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(i) Calcula las matrices que verifican la relación $\lvert A \rvert = \lvert A + I \rvert$, (donde I es la matriz identidad y $\lvert A \rvert$ representa el determinante de A.

(ii) Calcula todas las matrices diagonales, que no tengan inversa y que verifican la relación anterior.

(iii) ¿Se verifica para cualquier par de matrices B y C la relación $\lvert B + C \rvert = \lvert B \rvert + \lvert C \rvert$? Si no es cierto, pon un contraejemplo. Justifica todas las respuestas.

2BC PAU S2000 Oviedo

016

Sea A una matriz m x n

(a) ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

(b) ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB es una matriz fila? Si existe, ¿qué orden tiene?

(c) Busca una matriz B tal que $BA = (0 \quad 0)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2BC PAU J2001 Oviedo

017	Sea la ecuación matricial ABA = C. (a) ¿Qué orden tiene la matriz solución B? (b) Resuelve la ecuación cuando A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	2BC PAU S2001 Oviedo
018	(a) Determinar la matriz X para que tenga solución la ecuación C(A + X) B = I, donde A, B y C son matrices no singulares de orden n e I la matriz unidad de orden n. (b) Aplicar el resultado anterior para A = $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ NOTA: Matriz singular es aquella de determinante nulo.	2BC PAU J2002 Oviedo
019	Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 2a & a & a & a \\ a & 2a & a & a \\ a & a & 2a & a \\ a & a & a & 2a \end{pmatrix}$ (a) Calcular el valor de su determinante en función de a. (b) Encontrar su inversa, si existe, cuando a = 1	2BC PAU S2002 Oviedo
020	Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ (a) Calcular las matrices C y D tales que A·C = B·D = I, siendo I la matriz identidad de orden 2. (b) Discutir y resolver el sistema $(C^{-1} - D^{-1})\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ si C^{-1} y D^{-1} son las inversas de las matrices C y D indicadas en el apartado anterior.	2BC PAU S2002 Oviedo
021	(a) Si A es una matriz no singular y (B - C)·A = 0, siendo 0 la matriz nula, comprobar que B = C. (b) Según el resultado del apartado anterior, cuando A = $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, la única matriz X que verifica la ecuación X·A = 0 es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación? NOTA: Matriz singular es aquella de determinante nulo.	2BC PAU J2003 Oviedo
022	Sea A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (a) Calcula su inversa, si existe. (b) Encontrar la regla de cálculo de las sucesivas potencias A^n de A. (c) Resolver la ecuación $X(A^4 + A^2 – A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2BC PAU S2003 Oviedo
023	Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & x \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$ C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ D = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (a) Para qué valores de **x** la matriz A posee inversa. (b) Calcula la inversa de A para el valor x = - 1 (c) ¿Qué dimensiones debe tener un matriz B para que la ecuación matricial A · B = C · D tenga sentido. Calcula B para el valor x = - 1.	2BC PAU J2004 Oviedo

024	Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} m & 2 & 6 \\ 2 & m & 4 \\ 2 & m & 6 \end{pmatrix}$ B = $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (a) Discute el rango de A según los valores de m (b) ¿Qué dimensiones ha de tener la matriz X para que sea posible la ecuación A·X = B? (c) Calcula X para m = 0	2BC PAU S2004 Oviedo
🔒025	Resuelve las siguientes ecuaciones en la variable x (a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & x & 1 \\ -x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$	2BC PAU J2005 Oviedo
🔒026	Si la matriz A= $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante k. ¿Cuáles son los valores de los siguientes determinantes? (a) $\begin{vmatrix} d & 2e & f \\ a & 2b & c \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a+b & b & 2c \\ d+e & e & 2f \\ g+h & h & 2i \end{vmatrix}$	2BC PAU S2005 Oviedo
🔒027	Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$ donde ***x*** es un número real. Halla: (a) Los valores de x para los que la matriz A posea inversa. (b) La inversa de A para x = 2. (c) Con x = 5, el valor de $b \in \Re$ para que la matriz b A tenga determinante 1.	2BC PAU J2006 Oviedo
🔒028	Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (a) Estudia, en función de valores reales de k, si la matriz B · A tiene inversa (b) Lo mismo para la matriz A · B	2BC PAU S2006 Oviedo
🔒029	Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1+a \end{pmatrix}$ (a) Estudia, en función de **a**, el rango de las matrices A y B. (b) Calcula, para a = - 1, la matriz X que verifica A · X = B.	2BC PAU J2007 Oviedo
🔒030	Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (a) Comprueba que verifica que A^3 - I = 0, con I matriz Identidad y O matriz nula. (b) Calcula A^{13} (c) Basándose en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas halla la matriz X que verifica la igualdad A^2 X + I = A	BC2 PAU S2007 Oviedo

031	Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$ B = (a, 2, 3) y C = (4, 0, 2) (a) Halle los valores de **x, y, z**, para los que A no tiene inversa. (b) Determine los valores de **a** para los que el sistema B · A = C tiene solución. (c) Resuelva el sistema anterior cuando sea posible.	2BC PAU J2008 Oviedo
032	Se considera una matriz cuadrada A de orden tres que verifica la ecuación $A^2 = 6A - 9I$, donde I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (a) Exprese A^4 como combinación lineal de I y A. (b) Estudie si la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $B^2 = 6B - 9I$ Determine si B tiene inversa y, si la tiene, calcúlela.	2BC PAU S2008 Oviedo
033	Se consideran las matrices P = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2-a & 1 & a \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}$ y Q = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (a) Según los valores de $a \in \Re$, estudie el rango de P. (b) Para el caso a = 1, halle X tal que P · X = Q.	2BC PAU J2009 Oviedo
034	Dado el número real m, se considera la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (a) Halla los valores de m para los que la matriz A tiene inversa. (b) Para m = 2, halla, si existe, la inversa de A. (c) Para m = 2, calcula el vector X que verifica A·X = B siendo B = $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	2BC PAU S2009 Oviedo