UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA GRÁFICA EN EL AULA COMO APOYO PARA LA COMPRENSIÓN DE LA PRIMITIVA, LAS INTEGRALES DEFINIDAS E INDEFINIDAS DE UNA FUNCIÓN.

Abel Martín. Dpto. Matemáticas IES La Ería de Oviedo.

Dada una función **f(x)**, se denomina función primitiva de ésta a otra función **F(x)**, derivable en todo el dominio de **f(x)**, tal que **F'(x)** coincida con el valor de **f(x)** en dichos puntos.

Ejemplo: $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$

¿F(x)? ¿Cuál es la función F(x) que al ser derivada me da f(x)?

Podrían ser cualesquiera de las siguientes funciones:

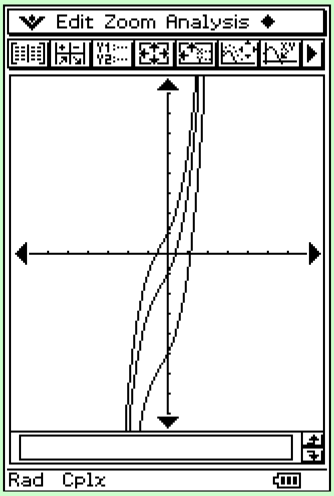
$F(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$

$F(x) = x^3 + x^2 + 2x - 1$

$F(x) = x^3 + x^2 + 2x - 5$

etc.

Cada una de estas funciones se denomina **FUNCIÓN PRIMITIVA**

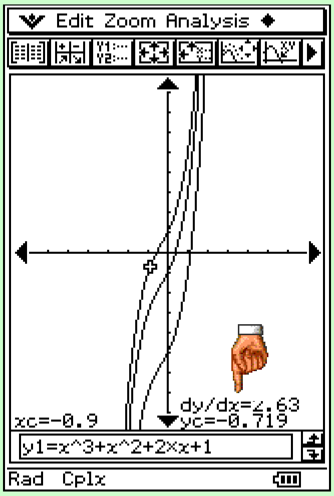


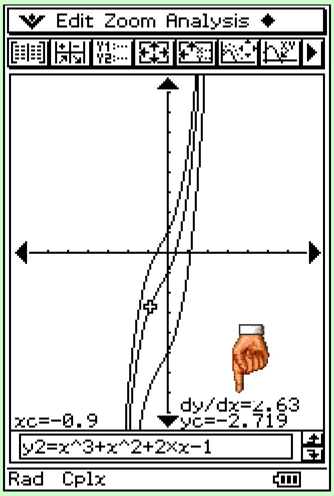
¿Realmente estás 3 funciones tienen, para cada valor de x, la misma pendiente?...

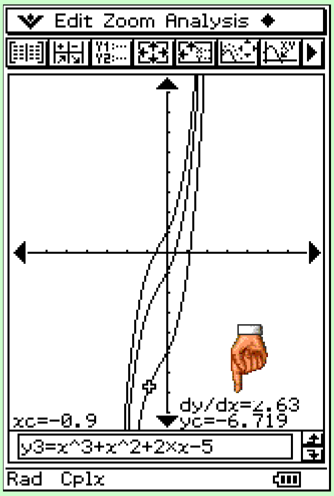
... es decir, el mismo valor de la derivada de la función en cada punto:

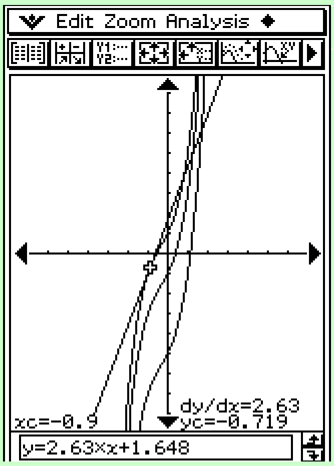
COMPROBACIÓN DE FORMA GRÁFICA

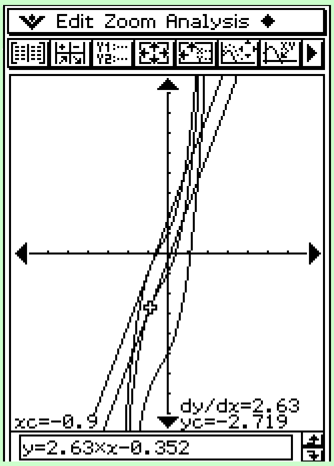
Para x = - 0.9

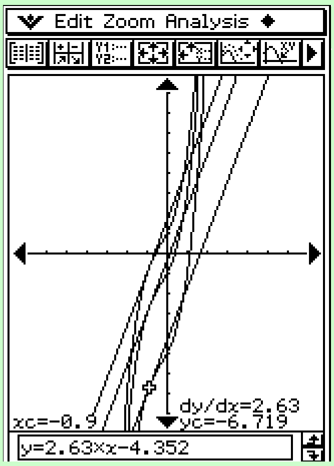






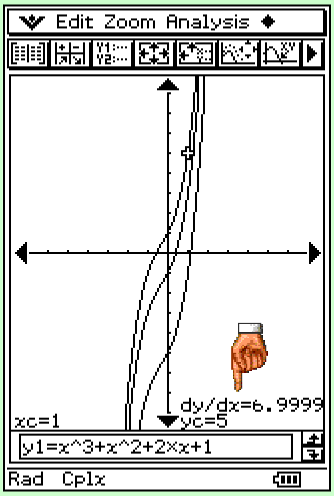


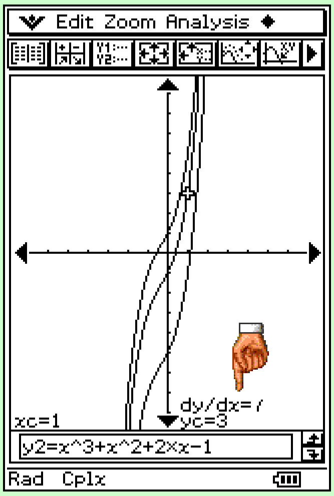


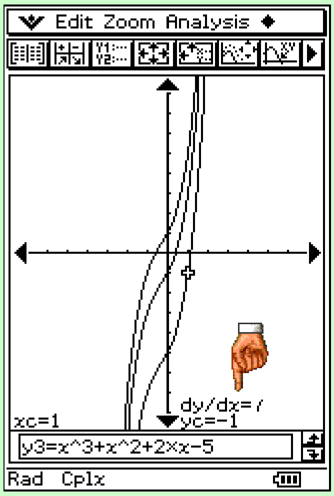


Las tangentes son paralelas, tienen la misma pendiente (fijarse en la ecuación de la tangente).

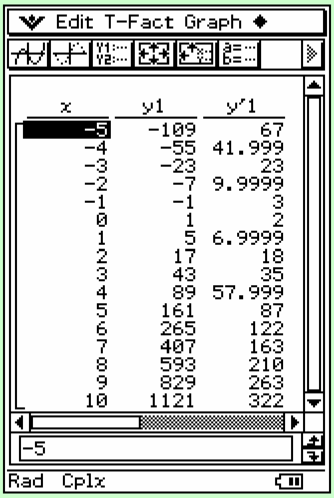
Para x = 1





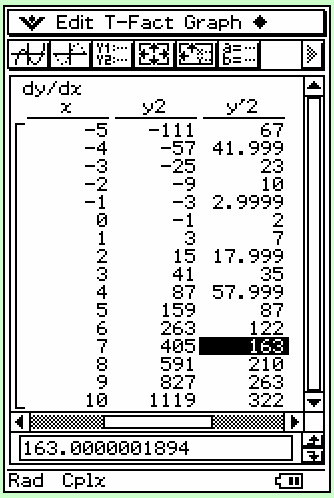


A TRAVÉS DE UNA TABLA DE VALORES



x	y1	y'1
-5	-109	67
-4	-55	41.999
-3	-23	23
-2	-7	9.9999
-1	-1	3
0	1	2
1	5	6.9999
2	17	18
3	43	35
4	89	57.999
5	161	87
6	265	122
7	407	163
8	593	210
9	829	263
10	1121	322

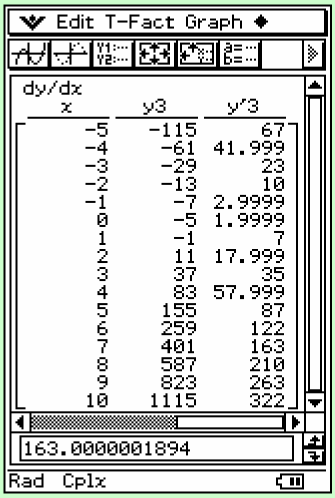
-5



dy/dx

x	y2	y'2
-5	-111	67
-4	-57	41.999
-3	-25	23
-2	-9	10
-1	-3	2.9999
0	-1	2
1	3	7
2	15	17.999
3	41	35
4	87	57.999
5	159	87
6	263	122
7	405	163
8	591	210
9	827	263
10	1119	322

163.0000001894



dy/dx

x	y3	y'3
-5	-115	67
-4	-61	41.999
-3	-29	23
-2	-13	10
-1	-7	2.9999
0	-5	1.9999
1	-1	7
2	11	17.999
3	37	35
4	83	57.999
5	155	87
6	259	122
7	401	163
8	587	210
9	823	263
10	1115	322

163.0000001894

Analizamos las tablas obtenidas y observamos varias cosas:

(a) Los valores de las funciones primitivas F(x) se modifican dependiendo del término independiente.

(b) Los valores de la derivada en cada uno de los puntos correspondientes no cambian (y'1 = y'2 = y'3).

Dada una función f(x) se podría calcular la primitiva, con lápiz y papel, realizando la integral indefinida de la función o mediante el potente SOLVE del álgebra simbólica de la calculadora.

¿ F(x) ?

f(x) = $f(x) = 3x^2 + 2x + 2$

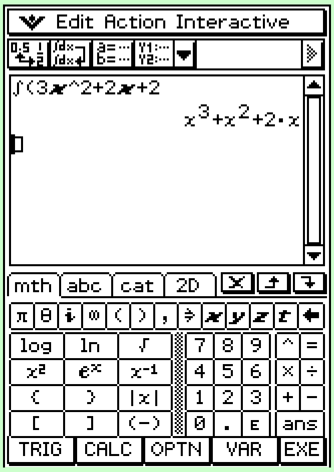
F(x) = $\int (3x^2 + 2x + 2)$ **dx**

$\int (3x^2 + 2x + 2)$ **dx** = $\int$ **3x² dx** + $\int$ 2x **dx** + $\int$ **2 dx =**

Se trata de integrales inmediatas

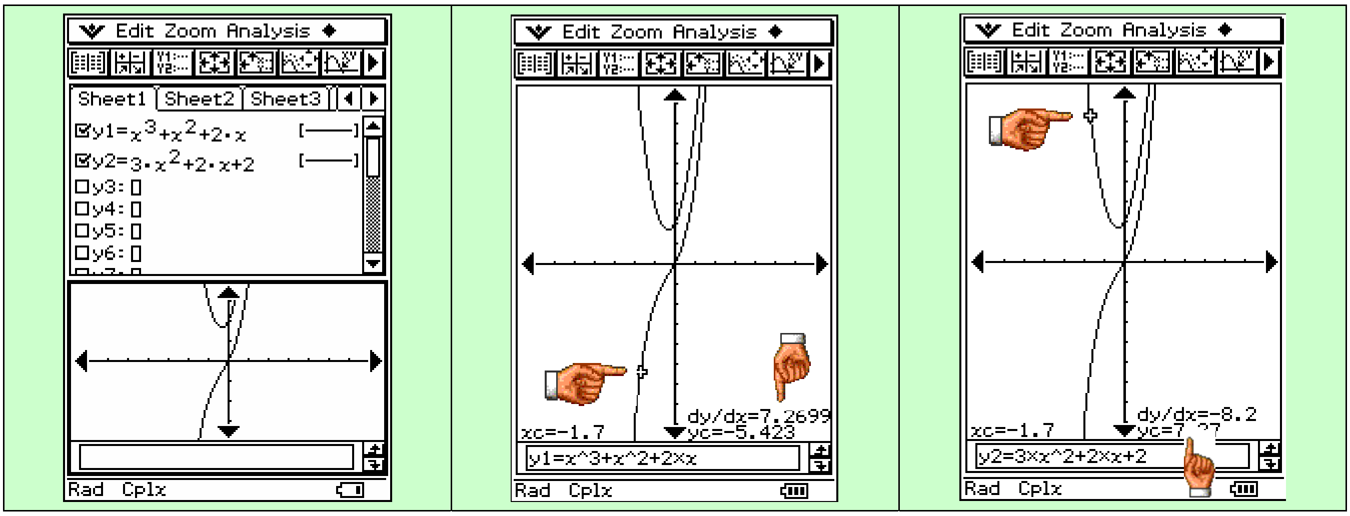
$$= 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 2x =$$

$$\mathbf{F(x) = x^3 + x^2 + 2x + k}$$

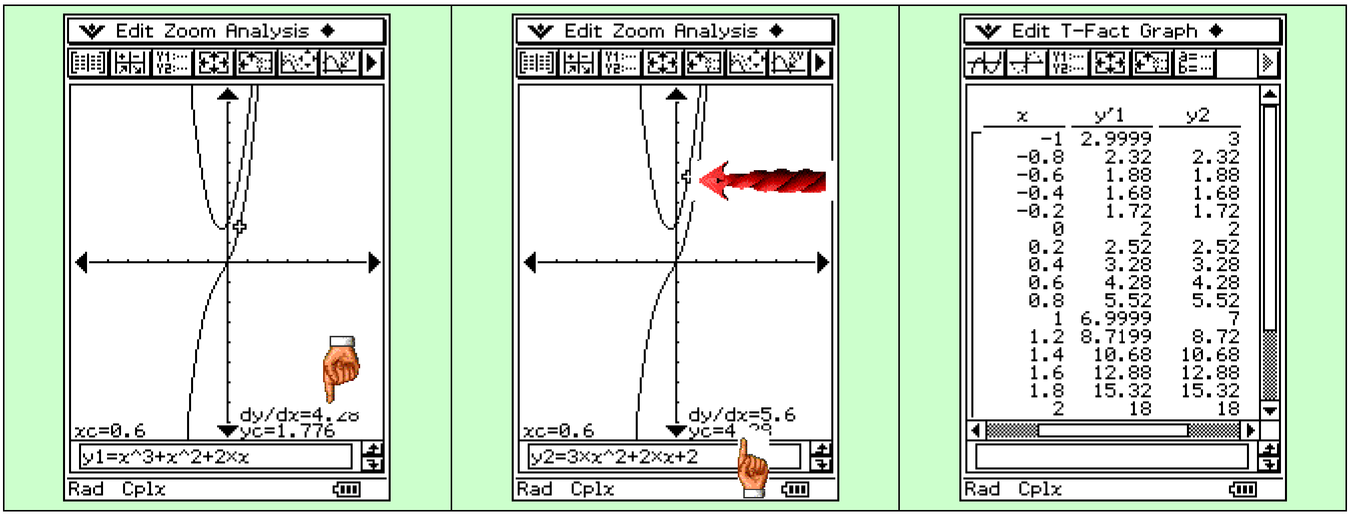


Comprobemos de forma visual, dibujando ambas funciones, cómo la derivada de F(x) en cada punto es el valor numérico de la función f(x) en cada punto:

y'1 = y2   en todos los puntos

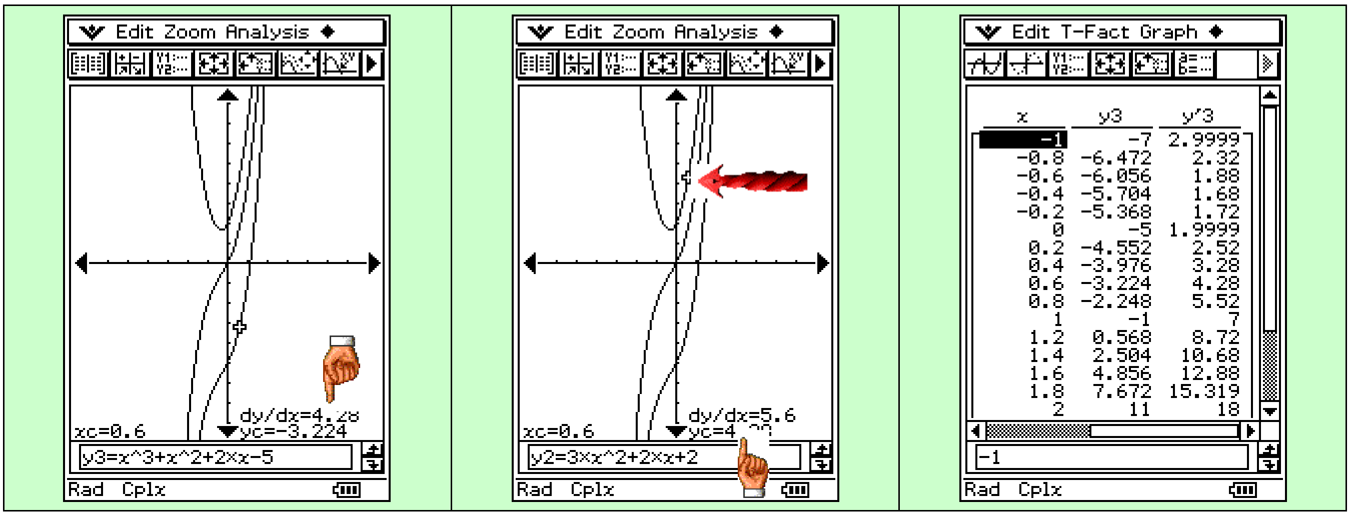


y1 será la función primitiva F(x) e y2 será la función derivada f(x)



y'1 = y2 en todos los puntos.

De la misma forma, si hubiésemos tomado cualesquiera de las funciones que constituyen la función primitiva, hubiésemos obtenido los mismos resultados; por ejemplo $y3 = x^3 + x^2 + 2x - 5$



Observamos las 2 últimas tablas de valores → y'3 = y2 en todos los puntos.

Veamos a continuación cómo podríamos resolver un problema propuesto en la UNIVERSIDAD DE OVIEDO, en la convocatoria de SEPTIEMBRE de 2002, con un tiempo de 1 hora y 30 minutos para resolver éste y otros 3 ejercicios, previo estudio de 6 ejercicios para elegir 4.
Realmente, con los algoritmos tradicionales, muy escaso tiempo para tanta decisión y ejecución.

UNIVERSIDAD DE OVIEDO. PAU SEPTIEMBRE 2002

Dada la función f(x) = x^3 - 27 + a x e^{x^2} , donde "a" es una constante,

(a) Encuentra una primitiva de f.

(b) Si a = 0, dibuja la función f para x ≥ 0 y encuentra el área limitada por la curva y el eje X entre x = 2 y x = 4.

RESOLUCIÓN APARTADO A

Dada una función **f(x)**, se denomina función primitiva de ésta a otra función **F(x)**, derivable en todo el dominio de **f(x)**, tal que **F'(x)** coincida con el valor de **f(x)** en dichos puntos.

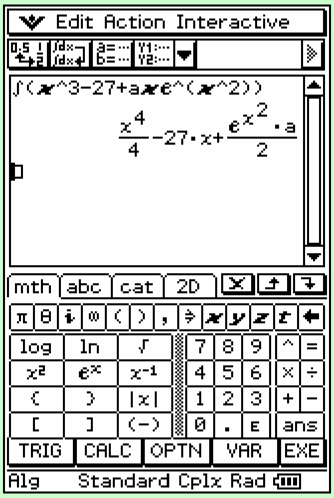
¿ F(x) ? f(x) = x^3 - 27 + a x e^{x^2}	F(x) = $\int (x^3 - 27 + a\,x\,e^{x^2})\,dx$

Dada una función f(x) se podría calcular la primitiva, con lápiz y papel, realizando la integral indefinida de la función o mediante la calculadora gráfica de álgebra simbólica:

$$\int x^3\,dx - \int 27\,dx + a\int x\,e^{x^2}\,dx =$$

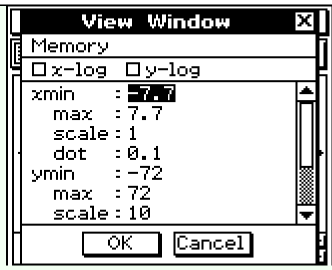
$$= \frac{x^4}{4} - 27x + a\,\frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx =$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 27x + \frac{a}{2}\,e^{x^2} + k$$

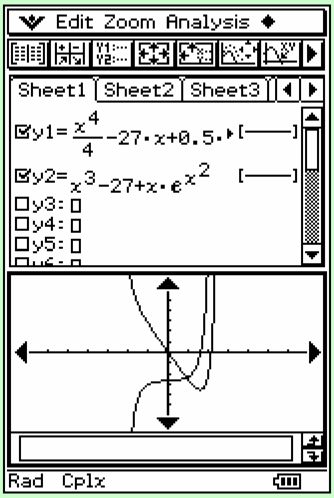


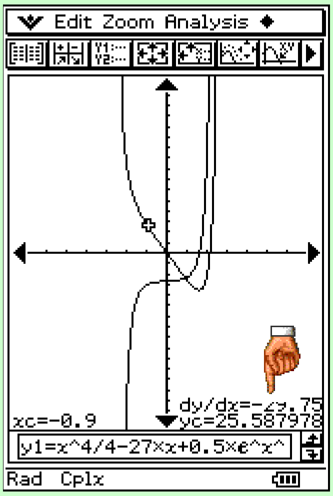
Como ya hemos explicado, si utilizamos la opción TRACE y movemos el cursor a cualquier punto de la gráfica F(x) y nos fijamos en el valor de la derivada en dicho punto (dy/dx) y vamos cambiando de función, manteniendo el valor de x, observaremos que:

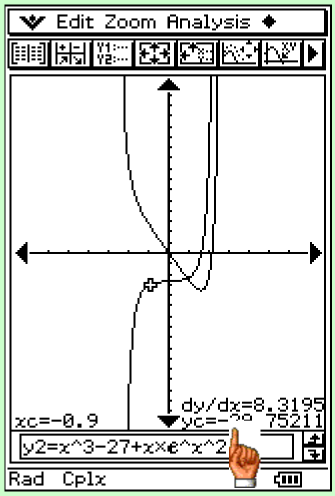
F'(x) = f(x)



Tomamos un valor cualquiera, por ejemplo, para a = 1



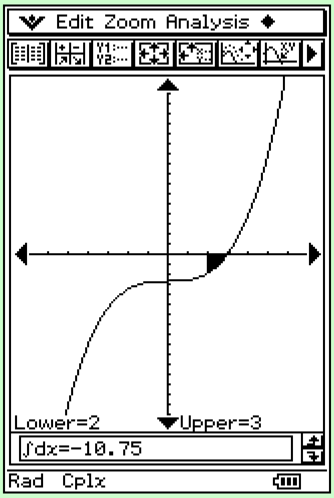


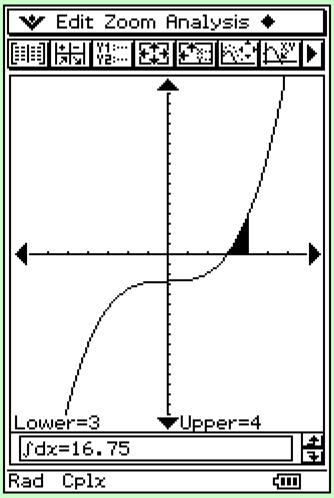


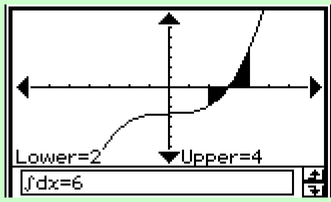
RESOLUCIÓN APARTADO B

Si a = 0 $\rightarrow$ **f(x)** = $x^3 - 27$ ¿Área entre x = 2 y x = 4?.

La representación gráfica puede resultar larga y farragosa; con la ayuda de la calculadora gráfica sólo tendremos que preocuparnos de diseñar una estrategia adecuada para el cálculo del área:





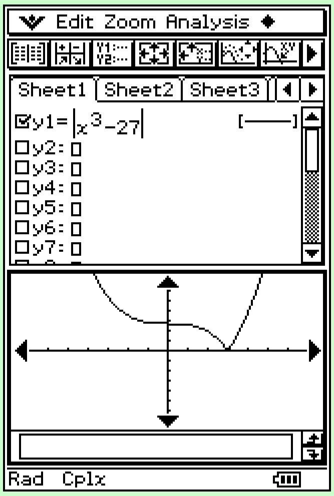


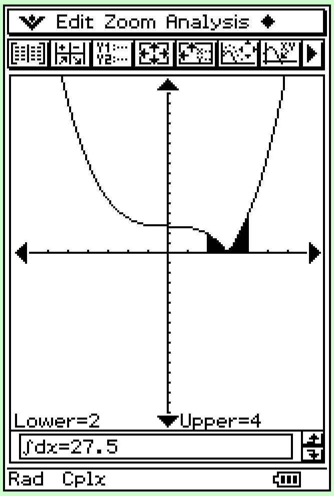
$S_T = S_1 + S_2$

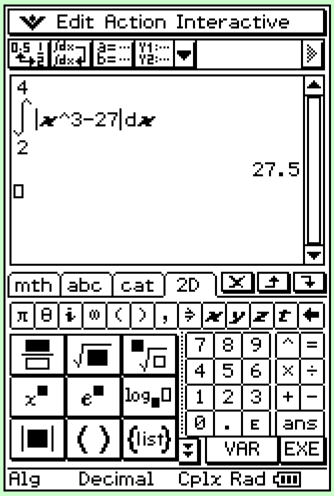
$S_T = 10.75 + 16.75$

$S_T = 27.5\ u^2$

Como el área encerrada por f(x), el eje de abscisas y las rectas x = 2, x = 4 está por debajo y por encima del eje OX, se calculará el área aplicando la siguiente estrategia:







¡¡Confirmado!!

Una vez visualizada la gráfica, es muy fácil diseñar la estrategia de cálculo del área con la potente herramienta de álgebra simbólica de la calculadora ClassPad 300 de CASIO.

Para consultas, sugerencias metodológicas, fe de erratas...
XI JAEM de Canarias
y una vez acabadas las Jornadas en...

www.aulamatematica.com

¿Crees que puedes aportar algo y ayudarnos a mejorar las estrategias de resolución de estos problemas?:
¡¡ escríbenos y déjanos saberlo !!

abelj@telecable.es