LÍMITES DE FUNCIONES, INDETERMINACIONES, CONTINUIDAD, RELACIÓN CON LA APLICACIÓN EN LA INTERPRETACIÓN DE SITUACIONES Y SU REPRESENTACIÓN.

Abel Martín.
Profesor de Matemáticas del IES Pérez de Ayala (Oviedo - Asturias).
Marta Martín Sierra.
Facultad de Matemáticas de la Universidad de Oviedo.

NIVEL

Primero y Segundo de Bachillerato. Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

OBJETIVOS

(1) Relacionar, representar, comprender y utilizar el concepto de límite de una función en un punto y en el infinito, con la ayuda de una calculadora gráfica.
(2) Calcular límites elementales de funciones, tanto en un punto como en el infinito.
(3) Entender el concepto de continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
(4) Concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento, la resolución de problemas y la aplicación en la interpretación de situaciones.
(5) Dominar la calculadora o programas informáticos adecuados para analizar una función.

CONCEPTOS PREVIOS DE REPASO

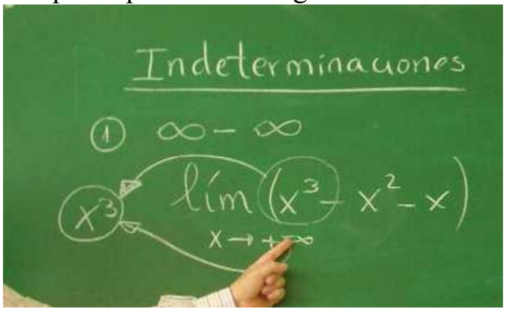
Para poder abordar el tema con garantías hacemos un rápido repaso con el alumnado de conceptos intuitivos de las funciones, sin entrar en formalismos teóricos, con la ayuda del ordenador, el cañón y la metodología ClassPad, mediante actividades expresamente preparadas a tal efecto, donde recordaremos:
Dominios, recorrido, representaciones gráficas de las funciones habituales, pendiente de una recta, valores numéricos en cada punto, asíntotas verticales, horizontales, oblicuas, máximos, mínimos, intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidades, puntos de inflexión, continuidad, discontinuidades y límites.
También haremos un breve recordatorio sobre las reglas operativas convencionales en las que intervenga el "infinito", para pasar a resolver las indeterminaciones habituales, en las que nos vamos a detener, y actividades de estudio de la continuidad de funciones.

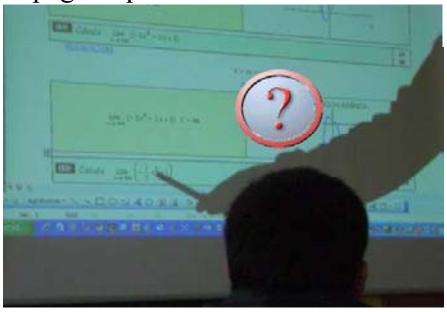
PROCEDIMIENTOS. METODOLOGÍA DE TRABAJO

En el aula coexistirán dos tipos de aprendizaje:

(a) Una enseñanza tradicional, donde resolveremos los límites de dos formas diferentes:
(a1) Utilizando el encerado y el "lápiz y papel", al detalle, demostrando algebraicamente cómo podemos resolver una indeterminación.

(a2) Mentalmente, siempre que se pueda, a través de procedimientos intuitivos, donde los alumnos tendrán fotocopias de baterías de ejercicios gradualmente más difíciles, dados por el profesor o que se pueden descargar de Internet en una página que señalaremos al final del tema.





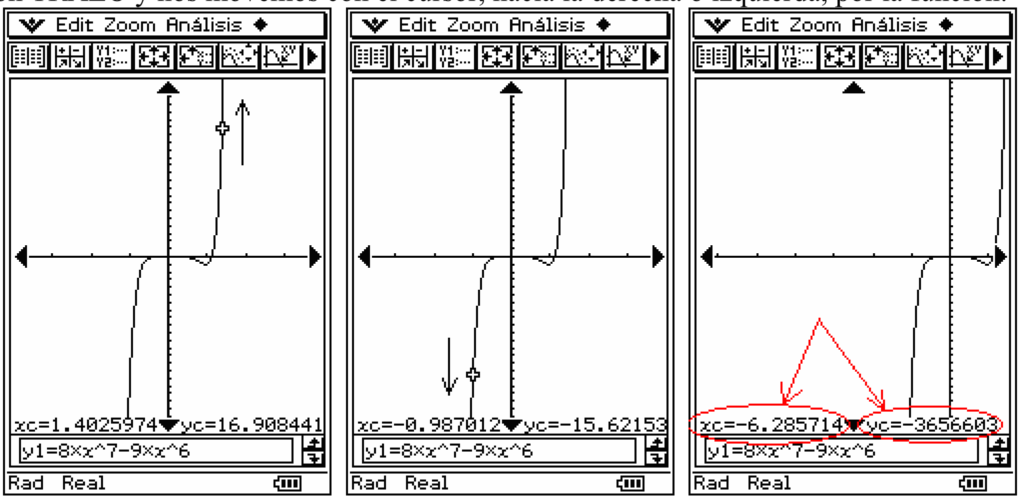
(b) Una enseñanza más innovadora y moderna, con la utilización de las nuevas tecnologías, como herramienta de ayuda, donde podremos "palpar" visualmente aquello que siempre hemos resuelto de forma "algebraica", muchas veces sin saber lo que realmente estábamos haciendo, con un aprendizaje activo y comprensivo de los conceptos. Para ello hemos preparado actividades electrónicas con la metodología ClassPad, a modo de autentico diseñador educativo.
Este método también lo utilizamos para confirmar que nuestros resultados son los correctos y reflexionar en ellos casos de discrepancia entre unos y otros, pudiendo discutir el alumnado los posibles errores, actuando el profesor como moderador. Insistimos, el objetivo final es el análisis y la reflexión de las situaciones.

ACTIVIDADES PROPUESTAS I

Uno de los apartados más enriquecedores consiste en la resolución de indeterminaciones a partir de una cuidada selección de ejercicios.
Las indeterminaciones ∞ - ∞ e ∞ / ∞ , trabajadas en las primeras actividades con métodos algebraicos tradicionales en el encerado, pasan a una segunda fase de cálculo mental. Con el cañón y de forma simultánea, se va estudiando el comportamiento gráfico, que confirma visualmente todos nuestros cálculos y nos permite entender e interiorizar lo que hacemos.
Veamos con un poco más al detalle esta última metodología a través de alguna de las muchas actividades propuestas al final del tema. Las dos primeras ya son dominadas por el profesorado.

- Calcula $\underset{x\to +\infty}{Lím}\ (8x^7 - 9x^6)$ y $\underset{x\to -\infty}{Lím}\ (8x^7 - 9x^6)$

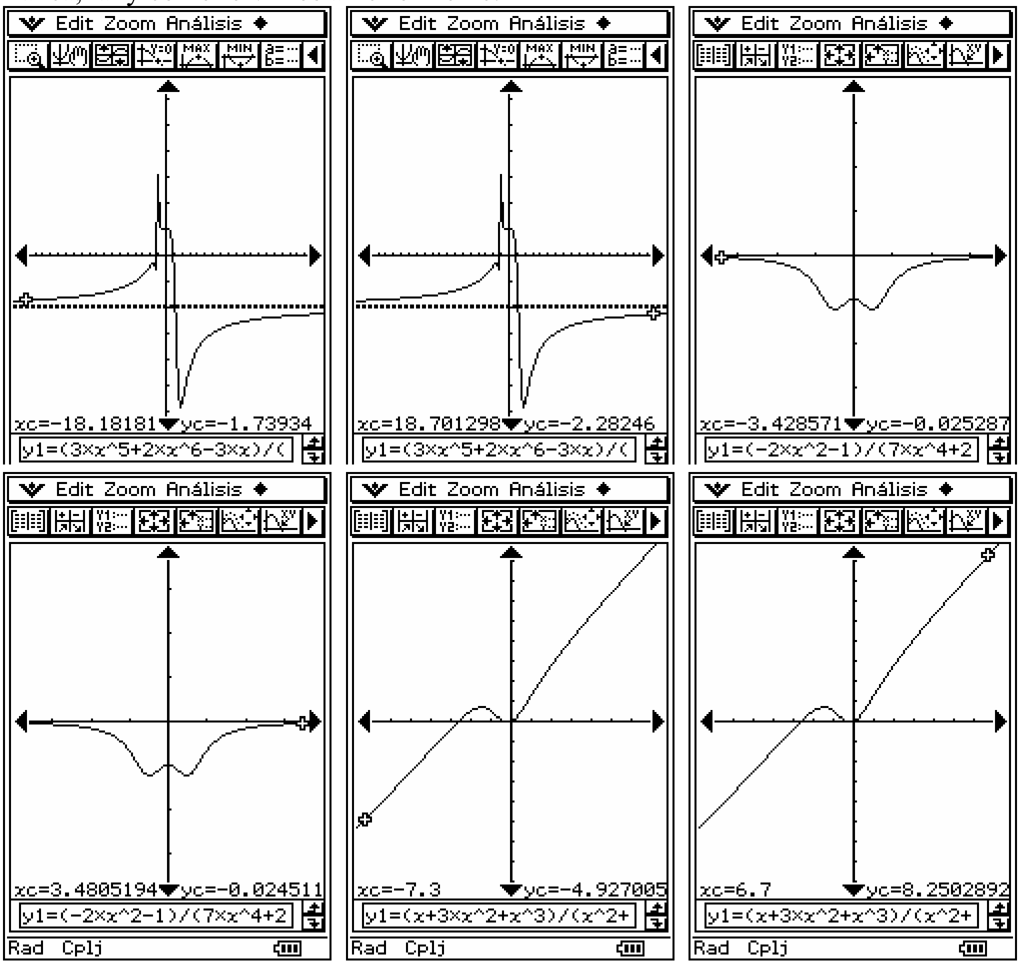
Algebraica y mentalmente obtenemos como resultado final + ∞ y - ∞, respectivamente. Si hacemos un análisis gráfico la confirmación es instantánea, sobre todo si nos ayudamos de la opción TRAZO y nos movemos con el cursor, hacia la derecha o izquierda, por la función:



- Calcula $\underset{x\to -\infty}{Lím} \dfrac{3x^5 + 2x^6 - 3x}{x^5 - x^6 - 3x}$; $\underset{x\to +\infty}{Lím} \dfrac{3x^5 + 2x^6 - 3x}{x^5 - x^6 - 3x}$; $\underset{x\to -\infty}{Lím} \dfrac{-2x^2 - 1}{7x^4 + 2}$; $\underset{x\to +\infty}{Lím} \dfrac{-2x^2 - 1}{7x^4 + 2}$;

$\underset{x\to -\infty}{Lím} \dfrac{x + 3x^2 + x^3}{x^2 + x + 2}$; $\underset{x\to +\infty}{Lím} \dfrac{x + 3x^2 + x^3}{x^2 + x + 2}$

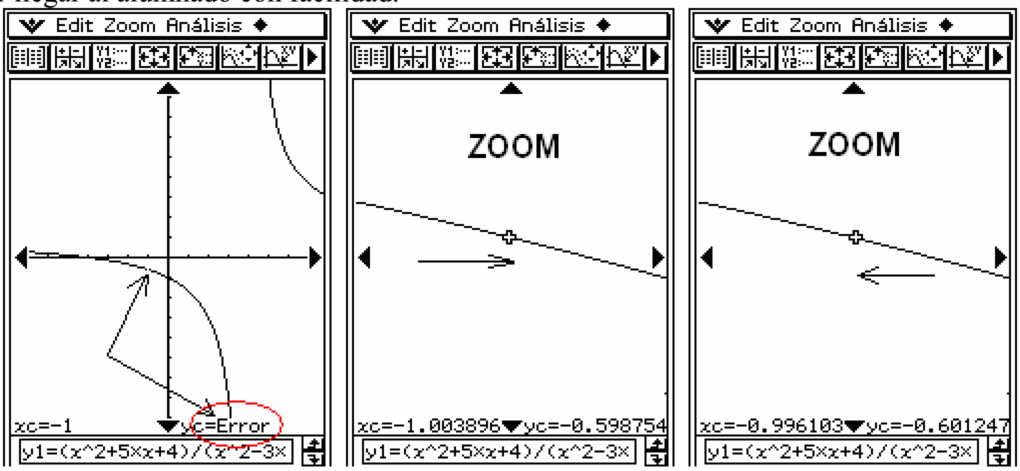
Algebraica y mentalmente obtenemos como resultado final -2, -2, 0, 0, -∞, +∞, respectivamente. Si realizamos un análisis gráfico la confirmación y la interiorización de la idea de límite es instantánea, tal y como lo vimos anteriormente:



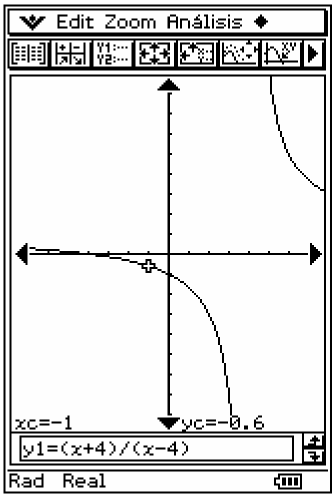
También se podría jugar con otras cuestiones, como colocar ventanas de visualización que indujesen a error, para que el resultado algebraico y gráfico sea distinto y provocar el debate.

- Calcula $\underset{x \to -1}{Lím} \dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x-4}$

En la indeterminación 0/0 la parte algebraica juega un papel prácticamente insustituible, pero la gráfica es espectacular. Nos permite descubrir cosas que ni nos imaginábamos y que podemos hacer llegar al alumnado con facilidad.



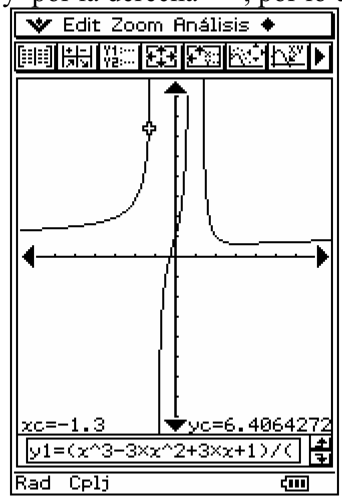
En la primera gráfica, podemos comprobar cómo para x = - 1 la función no existe (yc=Error): presenta una discontinuidad. En las dos siguientes, al hacer un ZOOM apreciamos cómo, si nos acercamos a x = - 1 por la izquierda y por la derecha los valores se aproximan a - 3/5 (- 0.6). Realmente al factorizar el numerador y denominador y simplificar, la nueva expresión a estudiar es $\underset{x\to -1}{Lím}\ \frac{x+4}{x-4}$. Cuando lo dibujamos vemos que la gráfica es aparentemente la misma, pero ahora para x = - 1 ya toma un valor numérico concreto (y = - 0.6).

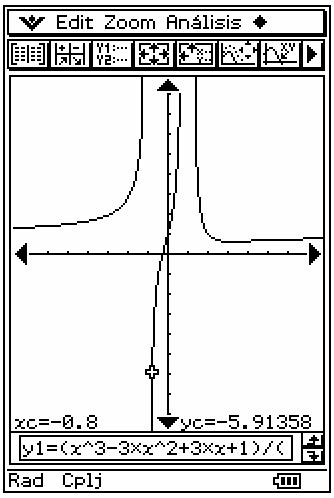


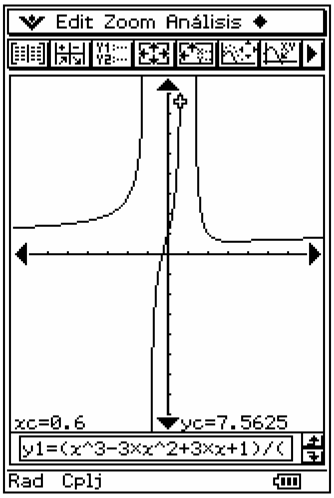
Realmente se trata de una discontinuidad evitable y lo que hacemos es volver a definir la función, convirtiéndola en una función continua en x = - 1. Esto suele ser espectacular para el alumno, que pasa de ver un concepto teórico a casi poder "tocarlo", apreciando la "magia" de las matemáticas

- Calcula $\underset{x\to 1}{Lím}\ \frac{x^3-3x^2+3x+1}{x^3-x^2-x+1}$; $\underset{x\to -1}{Lím}\ \frac{x^3-3x^2+3x+1}{x^3-x^2-x+1}$

Por métodos algebraicos comprobamos que se trata de indeterminaciones k/0 por lo que estudiamos sus límites laterales. Para x = 1, se dice que el límite es +∞ pues los valores obtenidos por la derecha y la izquierda son +∞, pero para x = - 1, por la izquierda obtenemos +∞ y por la derecha -∞, por lo que ahí no existe el límite de la función.







- Calcula $\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$; $\underset{x\to -\infty}{Lím}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$

Se trata de la indeterminación 1 elevado a infinito, que tras los cálculos algebraicos oportunos, vemos que tiende al número e. Gráficamente, tanto para +∞ como para -∞ obtenemos la misma solución de rápidamente.

Esto es tratado de forma habitual en las aulas, con una metodología o con otra, pero hay una parte que se deja un poco de lado y que desde aquí queremos potenciar: la aplicación en la interpretación de situaciones, a través de problemas literales que relacionen funciones matemáticas que dependen de una variable, con cuestiones que nos hagan reflexionar sobre lo que estamos haciendo con lo estudiado en el tema o incluso en anteriores: saber qué es un límite y utilizarlo en un contexto, comprender el concepto de

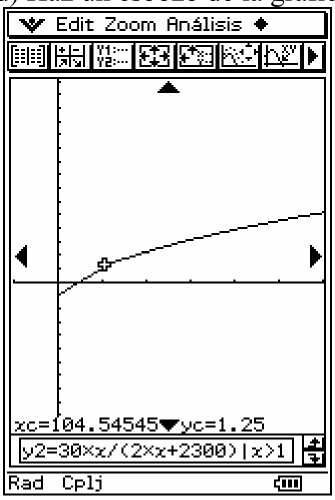
continuidad y distinguir perfectamente entre la continuidad en un punto y en un intervalo, la idea de inecuación, tomar decisiones, interpretar situaciones, etc.
Más adelante, cuando conozcamos los conceptos de derivadas y sus aplicaciones, podremos ampliar y enriquecer el número de cuestiones a plantear en cada problema. Presentamos a continuación alguna actividad en la línea de los objetivos planteados:

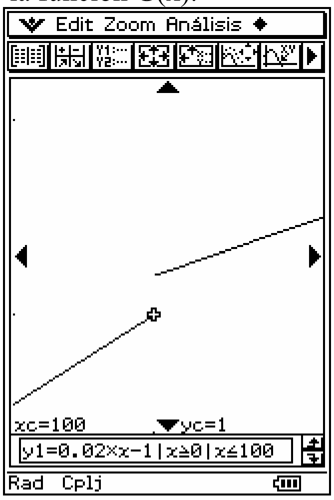
ACTIVIDADES PROPUESTAS II

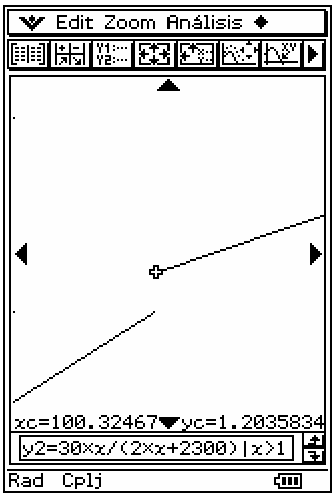
(1) En cierto colectivo de familias, el gasto mensual en ocio, G(x) en decenas de €, está relacionado con sus ingresos mensuales (x, en decenas de €), a través de la siguiente expresión:

$$G(x) = \begin{cases} 0.02x - 1 & si \quad 0 \le x \le 100 \\ \dfrac{30x}{2x + 2300} & si \quad 100 < x \end{cases}$$

(a) Estudia la discontinuidad del gasto. ¿El gasto en ocio de una familia es sensiblemente distinto si sus ingresos son "ligeramente" inferiores o superiores a los 1000 €?.
(b) Sabiendo que el gasto en ocio es siempre creciente con los ingresos, justifica que ninguna familia realiza un gasto en ocio superior a los 150 €.
(c) ¿Habrá en algún momento ahorro respecto al gasto en ocio?.
(d) Haz un esbozo de la gráfica de la función G(x).







(2) El tipo de interés anual — I(t) en % — ofrecido por una entidad financiera depende del tiempo — t en años — que esté dispuesto a mantener la inversión a través de la siguiente expresión:

$$I(t) = \frac{90t}{t^2 + 9}$$

(a) Estudia la continuidad de la función I(t).
(b) Si la función es siempre decreciente a partir de los 3 años y la inversión se mantuviese a muy largo plazo, ¿el tipo de interés podría llegar a ser negativo?. Justifica la respuesta.
(c) El interés será negativo en algún momento.
(d) Realiza un esbozo de la gráfica de la función.
A partir del 10 de julio de 2007, para ampliar, descargar actividades, propuestas de evaluación, preguntas indagatorias tipo test, etc. del tema, visita la Web:

www.aulamatematica.com

NOVEDADES: PROPUESTAS PARA EL NUEVO CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE LA ESO.

"En la construcción del conocimiento los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. En este sentido, la calculadora y las herramientas informáticas son hoy dispositivos comúnmente usados en la vida cotidiana, por tanto el trabajo de esta materia en el aula debería reflejar tal realidad".