La Programación Lineal y la calculadora gráfica.

Abel MARTÍN. Profesor de Matemáticas del IES Valliniello (Asturias).

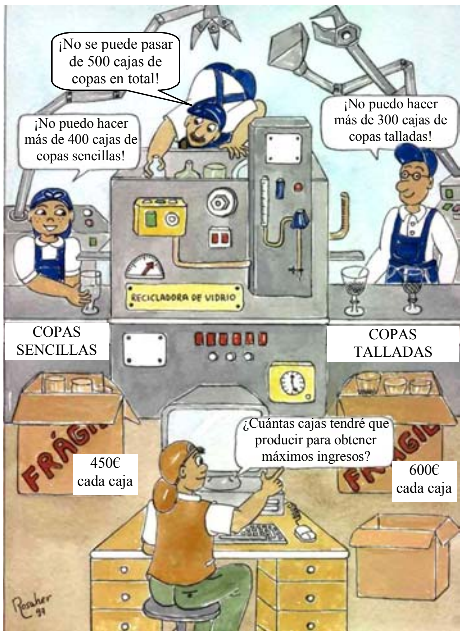
Se pretende, en este pequeño trabajo, presentar el desarrollo del bloque temático **La Programación Lineal**, tal y como se ha tratado en un grupo de 2ª de Bachillerato, modalidad de Ciencias Sociales.

Podemos destacar dos principios básicos en la metodología empleada:

* Las clases se basan, de una forma sistemática, en la resolución de problemas.
* Se utiliza, de modo habitual, ***la calculadora gráfica*** (en nuestro caso la CFX-9850G de CASIO) como herramienta de trabajo.

Se comienza la Unidad proporcionando a los alumnos y alumnas conocimientos que permitan concretar qué es la Programación Lineal y sus objetivos, destacando su importancia en la organización y planificación de la industria, y en el aumento de la efectividad económica. Las actividades están encaminadas a crear la necesidad de búsqueda de estrategias para resolverlas y la necesidad de apoyarnos en algún teorema, aunque sea intuitivo, que permita la optimización de una función. Poco a poco iremos, de esta forma, conociendo la terminología básica que hay que dominar para poder movernos en este tema que suele ser tratado en la mayoría de los libros de texto con un enfoque fundamentalmente referido a destrezas, dejando de lado su aspecto más investigador e innovador. Una herramienta como ***la calculadora gráfica*** enriquece su desarrollo, obteniéndose una nueva visión didáctica de cómo afrontar la optimización de problemas, sometidos a restricciones, ayudándonos a comprender su significado, interpretando y analizando críticamente las soluciones obtenidas, obviando el farragoso trabajo de realizar cálculos repetitivos; En definitiva, dando prioridad al razonamiento, objetivo fundamental de este Bachillerato, sobre el cálculo.

ACTIVIDAD I



Una fábrica de vidrio reciclado va a producir 2 tipos de copas: unas sencillas que vende a 450 PTAS y otras talladas a 600 PTAS. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sencillas, ni más de 300 talladas. Por razones de stock no se pueden fabricar más de 500 en total. Suponiendo que es vendida toda la producción:

a) ¿Cuántas de cada clase convendrá producir para obtener máximos ingresos?.

b) ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos?.

RESOLUCIÓN:

Trataremos de traducir el problema al lenguaje algebraico. Para ello es imprescindible la presencia del profesor ya que normalmente el error que se comete es de planteamiento, al explicitar las inecuaciones del conjunto de restricciones.

1.- DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS:

x: Número de copas sencillas.

y: Número de copas talladas.

2- FUNCIÓN OBJETIVO: Este problema, con dos variables, implica la existencia de una función que hay que optimizar. Esta función es la llamada *función objetivo*, que siempre es de la forma: F = ax + by.

FUNCIÓN OBJETIVO: Ingresos = 450 x + 600 y

3.- CONJUNTO DE RESTRICCIONES. Dichas variables están sometidas a unas restricciones expresadas en forma de sistemas de desigualdades o igualdades lineales. Así pues, con el profesor como moderador, comenzaremos a traducir el problema, haciendo hincapié en la necesidad de utilizar **inecuaciones** para enunciar restricciones.

$y \leq 300$ $\qquad x \geq 0$ $\qquad y \geq 0$

$x + y \leq 500$ $\qquad x \leq 400$

4.- LA REGIÓN FACTIBLE: Esto nos permite reforzar el concepto de resolución de sistemas de inecuaciones y ver su aplicación a la práctica cotidiana. Al resolver este sistema obtenemos, en el supuesto de que tenga solución, una región del plano. Esta superficie, acotada o no, es ***la región factible***.

Este es el momento en el que ***la calculadora gráfica*** cobra total protagonismo.

Presiona los cursores ▶ ◀ ▼ ▲ que consideres adecuados en el menú de presentación para seleccionar el modo **GRAPH** y ejecuta EXE

Aparece la pantalla con la lista de funciones. Seleccionamos el primer registro libre con los cursores ▼ ▲

Procedemos a introducir la inecuación $y \leq 300$ para lo que tenemos que indicar que se trata de una desigualdad y además de qué tipo:

TYPE	▷	Y≤				
F3	F6	F4	3	0	0	EXE

Automáticamente queda seleccionada la siguiente función para introducir la nueva inecuación $x + y \leq 500$. No olvidemos que hay que introducirla en forma explícita: $y \leq 500 - x$

5 0 0 — X,θ,T EXE

Automáticamente queda seleccionada la siguiente función preparada para introducir la nueva inecuación $y \geq 0$. Al ser una inecuación expresada de otra forma que las anteriores hay que modificar el TYPE

TYPE	▷	Y≥	
F3	F6	F3	0

¿Cómo hacer para introducir las inecuaciones $x \leq 400$, $x \geq 0$?

Podemos diseñar una estrategia para escribirlos:

Acotar la última función escrita en el intervalo [0,400]

	[							]	
,	SHIFT	+	0	,	4	0	0	SHIFT	-	EXE

No obstante si queremos que la recta x = 400 se visualice:

TYPE X=c
F3 F4 4 0 0 EXE

Por último lo que tenemos que hacer es ajustar los parámetros de la escala para la visualización de la ventana. Este ejercicio de búsqueda es muy didáctico e interesante para profundizar en los conceptos de escala de los ejes de coordenadas.

V-WIN
SHIFT F3

Unos parámetros de escala adecuados para este ejercicio podrían ser:

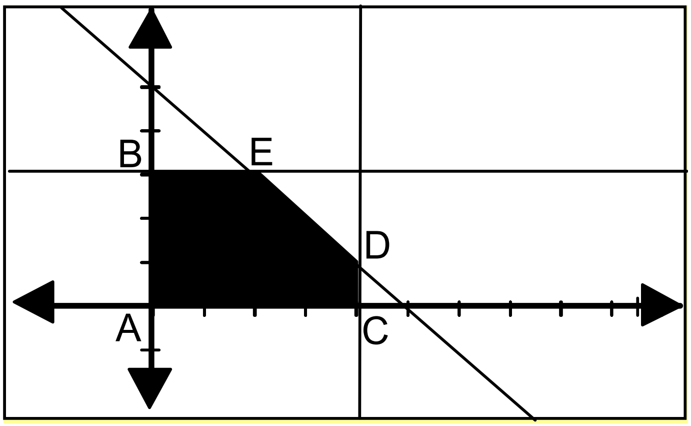
View Window

Xmin:	-200.
max:	750.
scl:	50.
Ymin:	-150.
max:	700.
scl:	50.

Representamos gráficamente la función:

DRAW
EXIT F6

Representamos gráficamente el sistema:



En este momento se puede rastrear dentro del recinto. Para ello simulamos que vamos a dibujar un punto

Sketch ▷ PLOT
F4 F6 F1 ▶ .. ◀ .. ▼ .. ▲ ..

Moviendo los cursores observamos las coordenadas de los infinitos puntos que hay en el interior del recinto y comprobamos que verifican todas y cada una de las restricciones del problema, reforzando así el concepto de *solución de un sistema de inecuaciones*. Pero…

—¿Cuál de esos infinitos puntos de la región factible genera unos ingresos máximos?

DRAW
EXIT F6

5.- LOCALIZACIÓN DE SOLUCIONES. Tomamos la función objetivo, y comprobamos uno de sus posibles valores; por ejemplo, cuando los ingresos son mínimos:

$$\textbf{Ingresos} = 450\,x + 600\,y \quad \rightarrow \quad 450\,x + 600\,y = 0$$

A continuación vamos a hacer un barrido con todas las posibles rectas paralelas a ésta (denominadas líneas de nivel) que pasen por el recinto de la región para saber cuando estos ingresos alcanzan un máximo, es decir, para comprobar cual de todas ellas tiene mayor ordenada en el origen. Lo cierto es que son infinitas las posibilidades por lo que ***se hace necesario la existencia de un teorema*** que permita la optimización de una función. Intuitiva y visualmente podemos demostrar el teorema que habitualmente se enuncia y no se demuestra algebraicamente:

Teorema: Como la región factible existe y está acotada, el valor óptimo de la función objetivo se alcanzará en uno de los vértices del polígono que limita la región, o a lo largo de uno de los lados. Si la región factible no es acotada, la función objetivo no alcanza necesariamente un valor óptimo concreto, pero si lo hace, éste se encuentra en uno de los vértices de la región.

Los vértices A, B y E se observan a simple vista:

A (0, 0) **B (0, 300)** **C(400, 0)**

Para hallar los vértices D y E vamos a utilizar ***la calculadora gráfica*** mediante la función **G - SOLVE,** y concretamente la opción intersección de rectas:

G-Solv	ISCT
F5	F5

Cálculo del vértice D (cruce de las rectas y = 500 - x y = 300)

Procedemos a señalar las dos funciones en las que queremos averiguar el punto donde se cruzan. Al utilizar la función **ISCT** aparecerá un pequeño cuadrado parpadeante en el extremo de la gráfica de una función. Cada vez que movamos los cursores ▼ ▲ el mencionado cuadradito se desplazará a una función diferente.

En este caso, como queremos averiguar el punto de cruce entre

$$y = 500 - x \qquad y = 300$$

Cuando el cuadradillo esté sobre y = 500 - x la validamos presionando **EXE** y cuando esté sobre y = 400 volvemos a presionar **EXE**

Al cabo de unos instantes el cursor parpadeante comienza a moverse buscando ese punto de corte hasta que lo encuentra, señalando en la parte inferior de la pantalla sus coordenadas:

E (200, 300)

Cálculo del vértice C (400,?) (Cruce de las rectas y = 500 - x x = 400)

Como ya sabemos que x = 400, para calcularlo bastaría con efectuar:

G-Solv	▷	Y-CAL
F5	F6	F1

De nuevo nos saldrá el cursor de selección de gráficas. En este caso seleccionamos y ≤ 500 - x con el cursor ▲, momento en el que presionamos **EXE**.

Ahora sólo nos queda introducir el valor de x para el que queremos hallar el valor de y:

4	0	0	EXE

C (400, 100)

6.- ANÁLISIS GRÁFICO DE ÓPTIMOS:

Volvamos a la recta que representa a la función objetivo que pasa por (0,0):

$$450\,x + 600\,y = 0$$

En forma explícita → $y = \frac{-45}{60}\,x$ → Por lo que la pendiente = $\frac{-45}{60}$ = - 0.75

De todas las infinitas rectas paralelas a esta de ganancia nula que pasan por el conjunto de restricciones, la que corresponde a una ganancia máxima será aquella que corte al eje OY por el punto más lejano del origen. Estas líneas de nivel serán rectas que tienen por ecuación en forma:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ecuación de la recta de pendiente "**m**" que pasa por el punto **(x_1 , y_1)**

que dada en forma explícita, para representarlo en la calculadora:

$$y = m\,(x - x_1) + y_1$$

Vamos a la lista de funciones, seleccionamos la forma de ecuaciones "y =" y, aplicando el TEOREMA antes mencionado, procedemos a dibujar sólo las líneas de nivel que pasan por los vértices calculados:

A (0,0) B (0,300) C (400,0) D (400, 100) E(200,300)

TYPE Y=
EXIT F3 F1

Colocamos el cursor en la primera línea de registro libre y representamos las rectas que pasan por los diferentes vértices:

A (0,0) → y = - 0.75 (x - 0) + 0

(—) 0 • 7 5 X,θ,T EXE

B (0,300) → y = - 0.75 (x - 0) + 300

(—) 0 • 7 5 X,θ,T + 3 0 0 EXE

C (400,0) → y = - 0.75 (x - 400) + 0

(—) 0 • 7 5 (X,θ,T — 4 0 0) EXE

D (400,100) → y = - 0.75 (x - 400) + 100

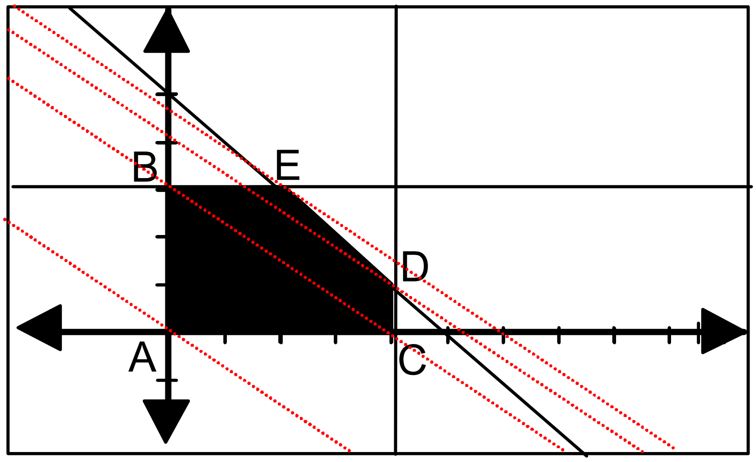
(—) 0 • 7 5 (X,θ,T — 4 0 0) + 1 0 0 EXE

E (200,300) → y = - 0.75 (x - 200) + 300

(—) 0 • 7 5 (X,θ,T — 2 0 0) + 3 0 0 EXE

Cambiamos las líneas de nivel a otro color, por ejemplo de color naranja. Para ello colocamos el cursor sobre la primera a la queremos modificarle el color:

COLR	Orng		Orng		Orng		Orng		Orng		DRAW
F4	F2	▼	F2	▼	F2	▼	F2	▼	F2	EXIT	F6



Así podemos comprobar que la recta que tiene mayor ordenada en el origen es la que pasa por el punto **E (200, 300)**

7.- SOLUCIÓN:

$ → **Los máximos ingresos** se obtendrán cuando se **produzcan 200 copas sencillas y 300 copas talladas**.

$$\text{Ingresos} = 450 \cdot 200 + 600 \cdot 300 = 270.000 \text{ PTAS.}$$

$ → En ese momento **los ingresos** ascenderán a **270.000 PTAS**

PARA GUARDAR EL PROBLEMA COMPLETO

GMEM	STO
F5	F1

Aparecerán 6 variables para guardar el problema completo. Por ejemplo, vamos a guardarlo en GM1

GM1
F1

Para recuperar el ejercicio en un momento determinado:

RCL	GM1
F2	F1

Todo esto y más lo puedes encontrar en www.aulamatematica.com