# LA TRIGONOMETRÍA PLANA:

## ERRORES HABITUALES AL UTILIZAR CALCULADORAS.

Abel MARTÍN. Profesor de Matemáticas del IES Valliniello (Asturias)

**El presente trabajo toma como referencia el libro "Taller de Matemáticas con calculadoras 2" de "Ediciones TREA S. L.", del que es autor quien firma el presente artículo.**

**NIVEL:** 4º de ESO y 1º de Bachillerato LOGSE.

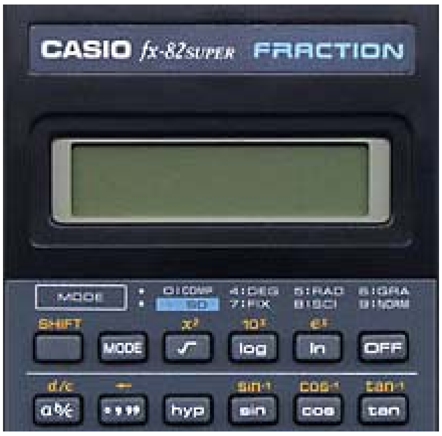
**OBJETIVOS:** Revisar detenidamente alguno de los principales errores que se cometen, tanto por parte del alumnado como del profesor, en la utilización de calculadoras científicas o gráficas, empleadas como herramientas auxiliares en el estudio de las razones trigonométricas.

**INTRODUCCIÓN:**

La calculadora ha supuesto, ciertamente, una revolución didáctica y procedimental en un tema como la TRIGONOMETRÍA, pero hemos de tener muy en cuenta que, y son muchos los profesores y alumnos que **NO** lo hacen, la calculadora nos propone en numerosos casos **UNA SOLUCIÓN**, sin tener en cuenta que puede haber otra u otras, y que inducen a error en la resolución de problemas; Son **ERRORES HABITUALES** que vamos a analizar y a estudiar. Para ello son necesarios la "mano" y el "cerebro", siempre vigilantes, del ser humano.

Todo esto me ha movido a presentar un panel acerca del presente tema en las IX JAEM, (Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas) celebradas en Lugo, que han despertado el interés de numerosos profesionales de la enseñanza, hechos que me han decidido a divulgar, a través de esta revista de gran difusión, las observaciones que a continuación expongo, mediante 6 ACTIVIDADES.

A lo largo de la exposición hemos tomado como modelo, para las diferentes sugerencias, la gama de calculadoras **fx – 82 de CASIO**, por ser las de uso más generalizado entre nuestros alumnos, pero cuyas explicaciones se pueden extrapolar fácilmente a cualquier otro modelo que tengamos, tanto en calculadoras científicas como gráficas.




La máquina parece que lo hace todo, muy cómoda, eficiente y rápida pero, como veremos, en último lugar la decisión es nuestra, permitiéndonos hacer Matemáticas en todo momento.


**1) Calcula el ángulo $\alpha$ $(0 \le \alpha \le 360)$ sabiendo que sen $\alpha = -0.6143$**

**(a) Si la solución que te sale es 217º 54' 3.87'' y 322º 5' 56.13'' es que lo has hecho correctamente.**

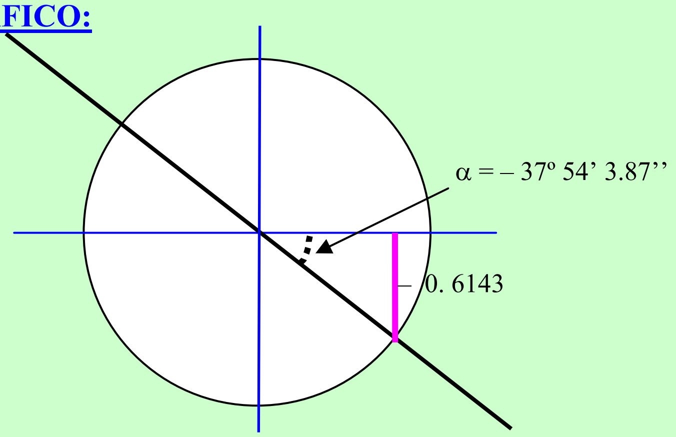
**(b) Si la que te sale es sólo – 37º 54' 3.87'' → ERROR HABITUAL. Investiga por qué.**


**b)** Técnicamente, con la calculadora, lo has hecho bien pero te han fallado los conceptos pues siempre has de comprobar GEOMÉTRICAMENTE cuál es la solución ya que en la primera vuelta normalmente tiene dos soluciones.

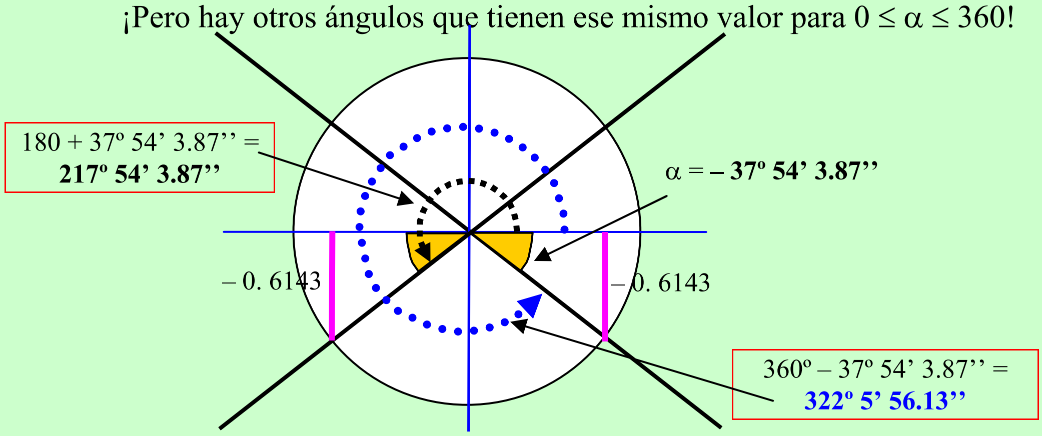
[0] [•] [6] [1] [4] [3] [+/-] [SHIFT] [sin] ($\sin^{-1}$) [SHIFT] [º ' ''] (←)

$\alpha = -37º\ 54'\ 3.87''$ (No está en $0 \le \alpha \le 360$)

**ANÁLISIS GRÁFICO:**




¡Pero hay otros ángulos que tienen ese mismo valor para $0 \le \alpha \le 360$!




**a) SOLUCIÓN DOBLE**:

$$\alpha = 217º\ 54'\ 3.87'' ,\ \alpha = 322º\ 5'\ 56.13''$$


**2) Calcula el ángulo $\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 360)$ sabiendo que el valor de $\cos \alpha = -0.763$**

**a) Si la solución que te sale es 139º 43’ 45.8’’ y 220º 16’ 14.2’’ es que lo has hecho correctamente.**

**b) Si la que te sale es sólo 139º 43’ 45.8’’→ ERROR HABITUAL. Investiga por qué.**

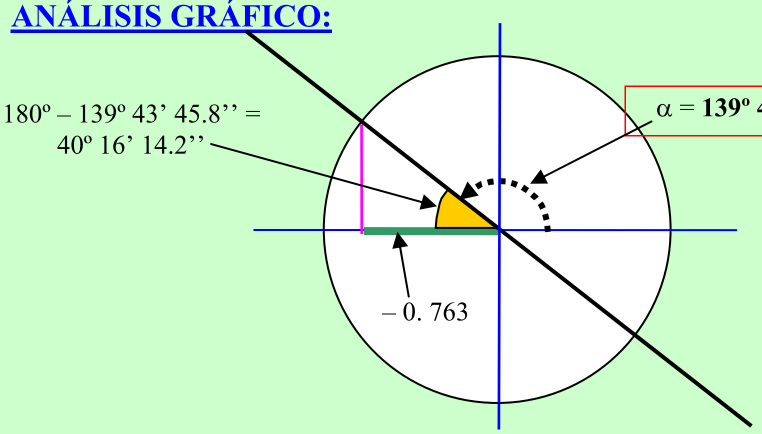
## SI QUIERES SABER POR QUÉ ...

**b)** Mecánicamente, con la calculadora, lo has hecho bien pero te han vuelto a fallar los conceptos pues siempre has de comprobar GEOMÉTRICAMENTE cuál es la solución ya que en la primera vuelta tiene normalmente dos soluciones.

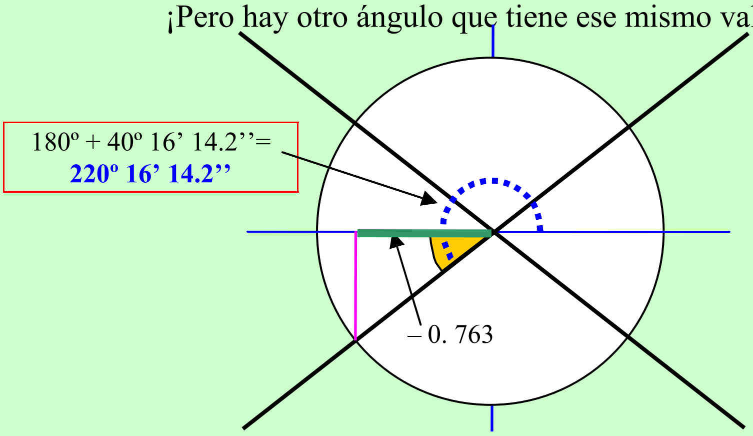
| 0 | • | 7 | 6 | 3 | +/- | SHIFT | cos ($\cos^{-1}$) | SHIFT | º ’ ’’ (←) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$\alpha = 139^\circ\ 43'\ 45.8''$

**ANÁLISIS GRÁFICO:**




¡Pero hay otro ángulo que tiene ese mismo valor para $0 \leq \alpha \leq 360$!




**a) SOLUCIÓN DOBLE:**

$\alpha = 139^\circ\ 43'\ 45.8''$ y $\alpha = 220^\circ\ 16'\ 14.2''$


**3) Calcula el ángulo $\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 360)$ sabiendo que tg $\alpha = 0.706065092$**

**a) Si la solución que te sale es 35º 13' 28.49'' y 215º 13' 28.4'' es que lo has hecho correctamente.**

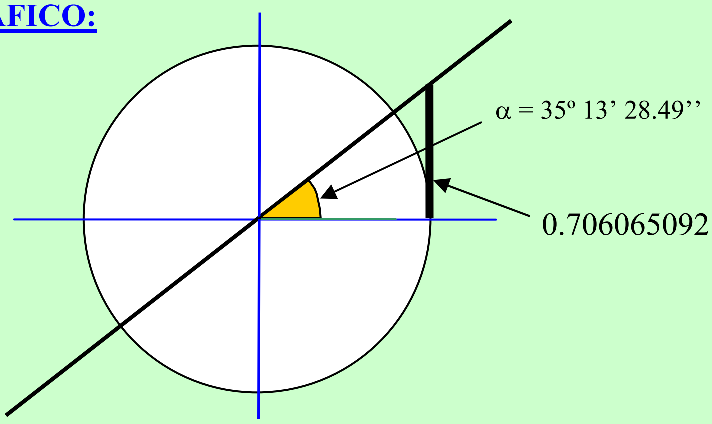
**b) Si la que te sale es sólo 35º 13' 28.49''→ ERROR HABITUAL. Investiga por qué.**


**b)** Técnicamente lo has hecho bien pero te han fallado otra vez los conceptos pues has de comprobar GEOMÉTRICAMENTE la solución ya que normalmente tiene, en la primera vuelta, dos soluciones.

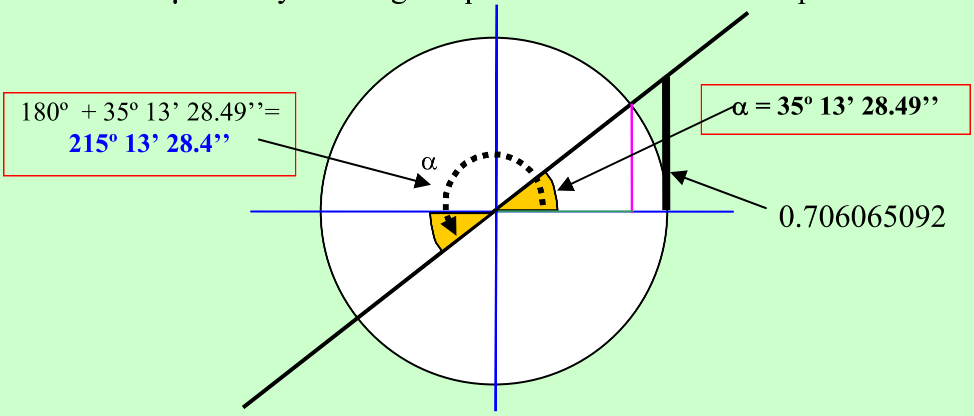
| 0 | • | 7 | 0 | 6 | 0 | 6 | 5 | 0 | 9 | 2 | SHIFT | tan ($\tan^{-1}$) | SHIFT | ° ' '' (←) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

$\alpha = 35º\ 13'\ 28.49''$

**ANÁLISIS GRÁFICO:**




¡Pero hay otro ángulo que tiene ese mismo valor para $0 \leq \alpha \leq 360$!




a) SOLUCIÓN DOBLE:

$\alpha = 35º\ 13'\ 28.49''$ y $\alpha = 215º\ 13'\ 28.4''$


**4) Calcula el ángulo α (0 ≤ α ≤ 360) sabiendo que cotg α = – 1.4163**

**a) Si la solución que te sale es 144º 46’ 31.5’’ y 324º 46’ 31.5’’ es que lo has hecho correctamente.**

**b) Si la que te sale es sólo – 35º 13’ 28.49’’→ ERROR HABITUAL. Investiga por qué.**

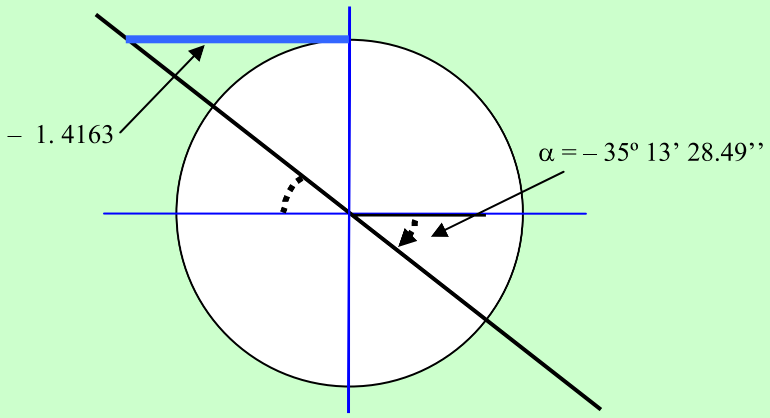

**b)** Comprobamos geométricamente la solución:

$$\textbf{cotg } \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = -1'4163 \Rightarrow \frac{1}{-1'4163} = tg\ \alpha$$

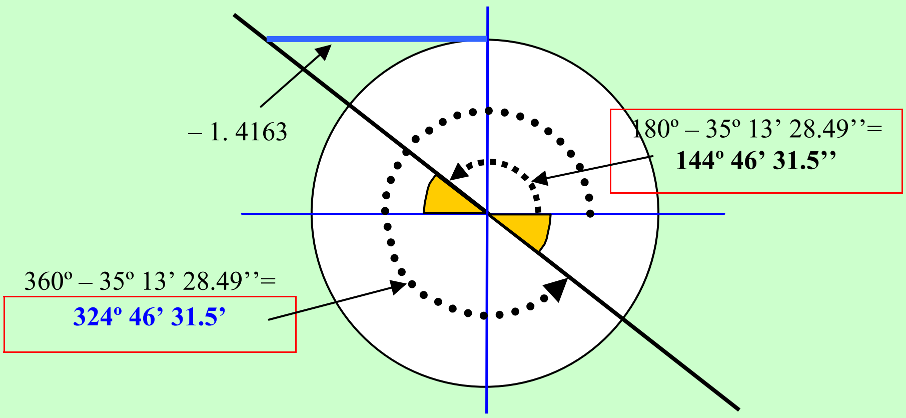
| 1 | • | 4 | 1 | 6 | 3 | +/- | SHIFT | Min (1/x) | SHIFT | tan (tan⁻¹) | SHIFT | º ’ ’’ (←) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

α = – 35º 13’ 28.49’’

**ANÁLISIS GRÁFICO:**




¡Pero hay otros ángulos que tienen ese mismo valor para 0 ≤ α ≤ 360!




a) SOLUCIÓN DOBLE:

α = 144º 46’ 31.51’’ y α = 324º 46’ 31.5’’


**5) Calcula el ángulo α (0 ≤ α ≤ 360) sabiendo que el valor de sec α = 2.0895**

**a) Si la solución que te sale es 61º 24’ 25.48’’ y 298º 35’ 34.5’’ es que lo has hecho correctamente.**

**b) Si la que te sale es sólo 61º 24’ 25.48’’→ ERROR HABITUAL. Investiga por qué.**

## SI QUIERES SABER POR QUÉ ...

**b)** Comprobamos GEOMÉTRICAMENTE cuál es la solución ya que en la primera vuelta tiene normalmente dos soluciones.

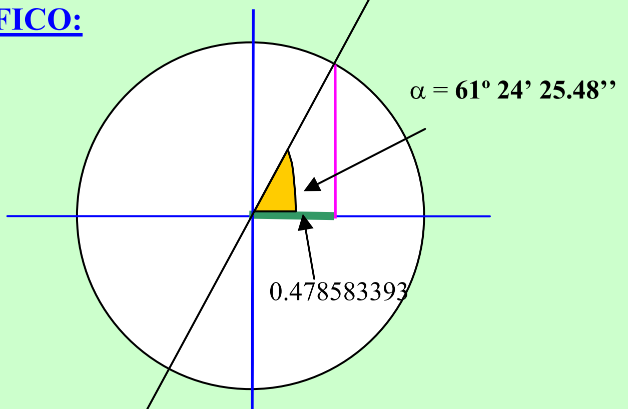
Como no tenemos la tecla **sec**$^{-1}$ α , sustituimos:

$$\mathbf{sec}\ \alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 2'0895 \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = 2'0895 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2.0895} = 0.478583393$$

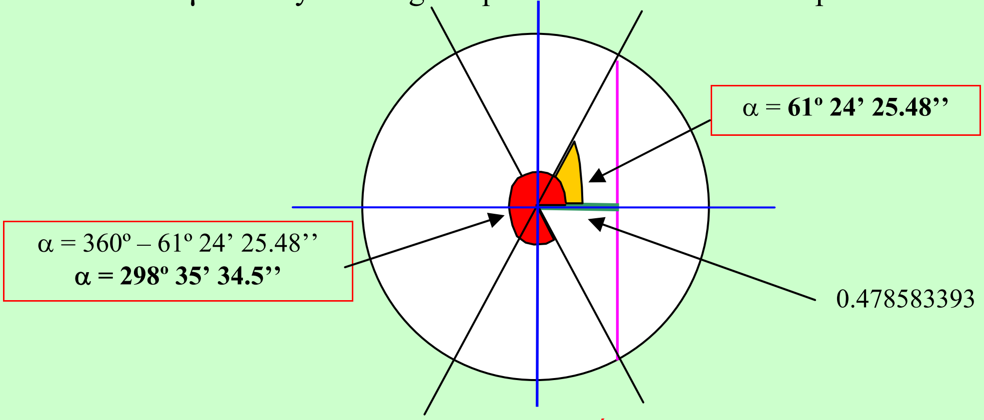
2 • 0 8 9 5 SHIFT Min (1/x) SHIFT cos ($\cos^{-1}$) SHIFT º ’ ’’ (←)

α = 61º 24’ 25.48’’ y estudiamos el coseno

**ANÁLISIS GRÁFICO:**




¡Pero hay otro ángulo que tiene ese mismo valor para 0 ≤ α ≤ 360!




a) SOLUCIÓN DOBLE:

**α = 61º 24’ 25.48’’ y α = 298º 35’ 34.5’’**

**ERRORES HABITUALES**

**6) Calcula el ángulo α (0 ≤ α ≤ 360) sabiendo que el valor de cosec α = 2.89**

**a) Si la solución que te sale es α = 20º 14' 38.83'' y α = 159º 45' 21.1'' es que lo has hecho correctamente.**

**b) Si sólo te sale α = 20º 14' 38.83'' → ERROR HABITUAL. Investiga por qué.**

## SI QUIERES SABER POR QUÉ ...

**b)** Hemos de comprobar GEOMÉTRICAMENTE cuál es la solución ya que en la primera vuelta tiene normalmente dos soluciones.

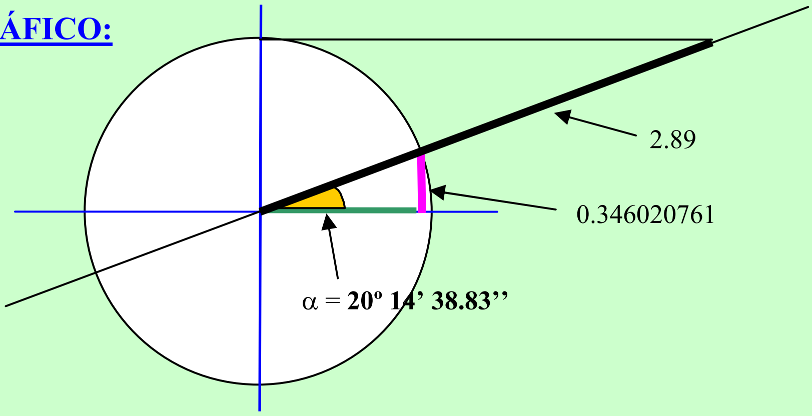
Como no tenemos la tecla **cosec$^{-1}$** α , sustituimos: **cosec α =** $\frac{1}{\text{sen } \alpha}$ = 2'89

$$\frac{1}{\text{sen } \alpha} = 2'89 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } \alpha = \frac{1}{2.89} = 0.346020761$$

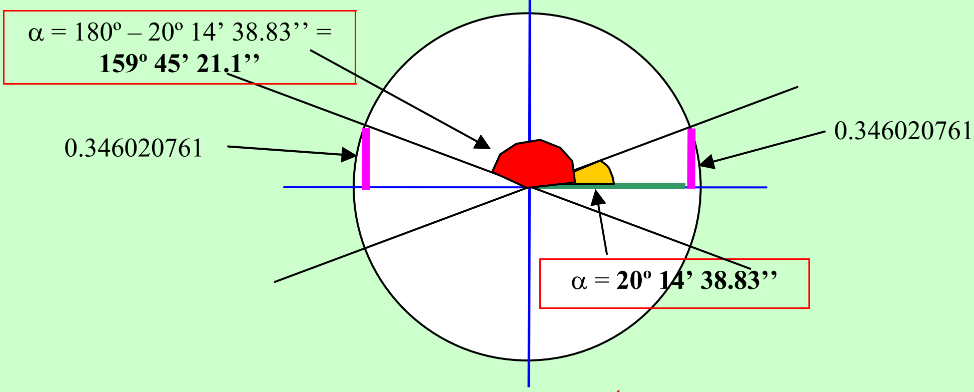
| 2 | • | 8 | 9 | SHIFT | Min (1/x) | SHIFT | sin (sin$^{-1}$) | SHIFT | º ' '' (←) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

α = 20º 14' 38.83'' y estudiamos el seno

**ANÁLISIS GRÁFICO:**




¡Pero hay otro ángulo que tiene ese mismo valor para 0 ≤ α ≤ 360!




a) SOLUCIÓN DOBLE:

**α = 20º 14' 38.83'' y α = 159º 45' 21.1''**