MISIÓN: VIAJE AL INTERIOR (CON UNA CALCULADORA GRÁFICA) EN BUSCA DE UNA DISCONTINUIDAD

ABEL MARTÍN, profesor de Matemáticas Física y Química IES La Ería (Oviedo).
aulamatematica@gmail.com

La idea de hacer un estudio local de una función para un valor determinado de "x" en el plano e ir aumentando un punto sucesivamente se realizaba, habitualmente, mediante herramientas matemáticas, pero no podemos obviar que la vista es el sentido que más informa a nuestra mente.

El estudio de los límites nos permitía "observar" discontinuidades y confiar en las explicaciones del profesor, estando en la obligación "histórica" de creernos todo aquello que se nos intentaba explicar.

Pero hagamos un viaje hacia el interior con un vehículo como la calculadora gráfica, y veamos, a continuación, una comprobación o demostración visual de un límite y cómo, a través de una serie de "zoom" encadenados llegamos prácticamente a "tocar" el infinito:

Calcula $\underset{x\to 1}{Lím}\ \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ y observa si tiene alguna discontinuidad.

RESOLUCIÓN CON LÁPIZ Y PAPEL

= 6/0

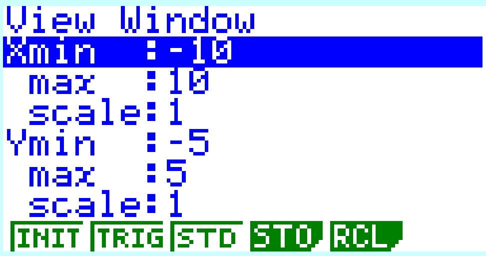
Se trata de la indeterminación K/0 por lo que calcularemos los límites laterales para ver si existe el límite y, en caso afirmativo, cual es su valor:

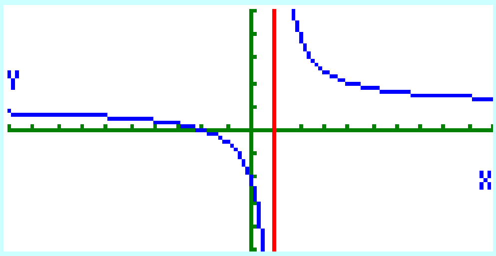
$$\underset{x\to 1^+}{Lím}\ \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

$$\underset{x\to 1^-}{Lím}\ \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$\underset{x\to 1^+}{Lím}\ f(x) \neq \underset{x\to 1^-}{Lím}\ f(x)$$

No existe $\underset{x\to 1}{Lím}\ \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$



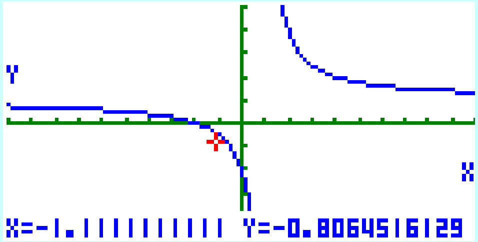


Para x = 1 se observa perfectamente que la función es discontinua pero nuestro conocimiento matemático nos dice que también parece haber una discontinuidad en x = - 1, cosa que no se visualiza, por lo que realizaremos reiteradas cajas de zoom (zoom box) para ampliar la zona de la función para x = - 1. Haremos, como ya hemos dicho, un "viaje al interior".

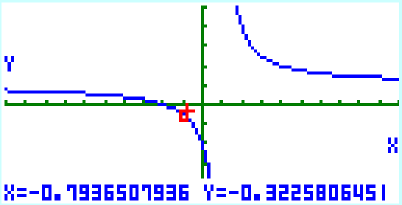
De esta forma vamos a incluir la región crítica en una caja (**BOX**) y llevamos el punto "**centelleante**" con los cursores hasta situarlo donde queramos establecer uno de los vértices de la *CAJA*, por ejemplo, el mencionado al margen

Zoom Box

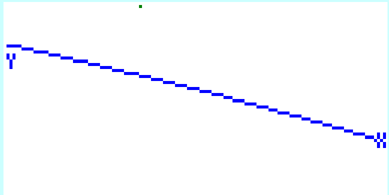
F2 F1 ◀ ◀... ▼ ▼ ...



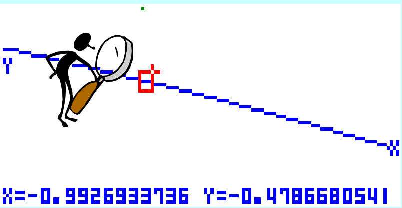
Presionamos **EXE** para validar y fijar dicho vértice. A continuación movemos los cursores hacia arriba y a la derecha, determinando el tamaño de la caja.



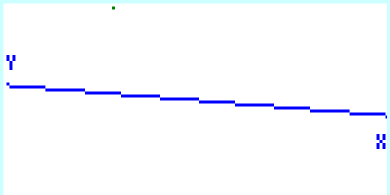
EXE →



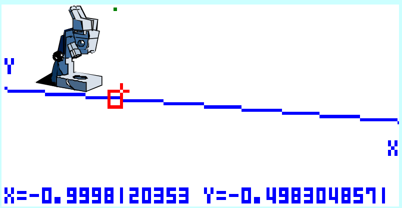
Seguimos sin apreciar la discontinuidad, por lo que volvemos a aumentar la zona en estudio de igual forma que antes, con la opción "zoom box". Estaríamos en el mundo de la "lupa".



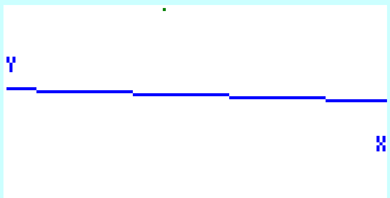
EXE →



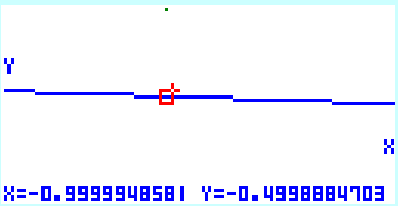
... otra vez. Ahora entramos en el mundo del microscopio óptico:



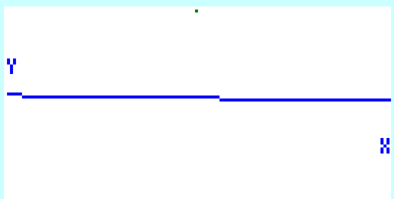
EXE →



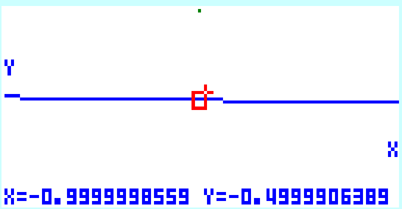
... y otra, para llegar ya al mundo del microscopio óptico, pero con muchos aumentos:



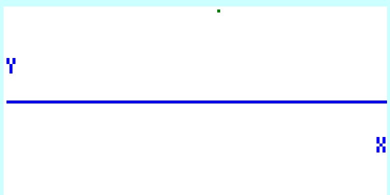
EXE →



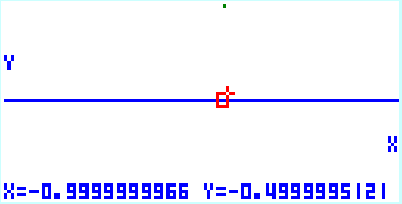
... y otra más, penetrando ya en los intrincados mundos del microscopio electrónico de barrido:



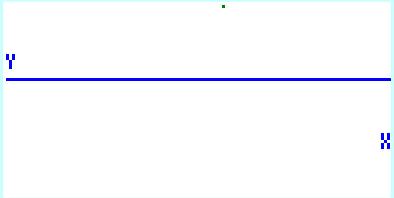
EXE →



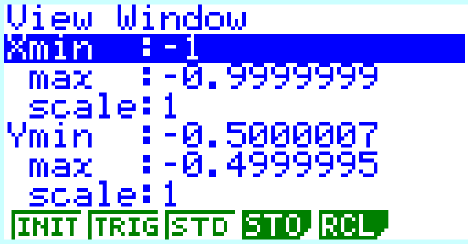
... y otra que nos eleva al mundo de la micrografía electrónica...



EXE →

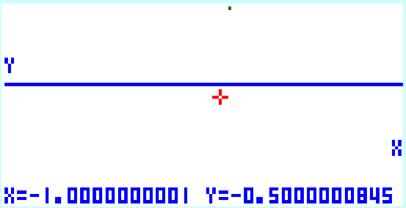


En estos momentos ya empezamos a perder un poco la esperanza, sólo hay que mirar los valores de la "x" en la ventana de visualización:

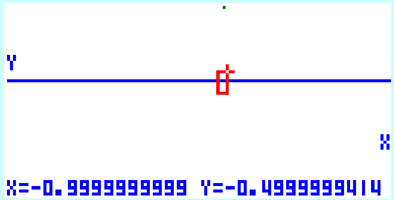


Veamos ya los valores inferior y superior que toma la "x" en la caja, distantes 10^{-10} unidades, penetrando en la supuesta escala atómica, regida por las leyes cuánticas.

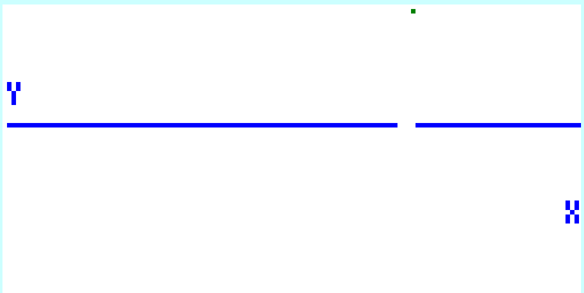
inferior:



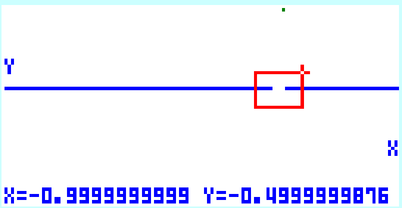
superior:



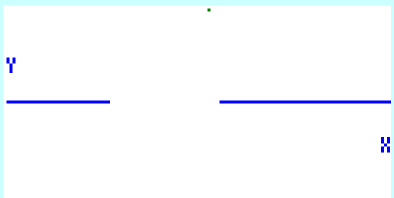
EXE



¡ Por fin !. La penúltima puerta hacia el infinito se nos abre y, allí, en los umbrales del mundo real comenzamos a vislumbrar un pequeño "hueco" que nos permite observar cómo, para x = - 1, la función es discontinua...



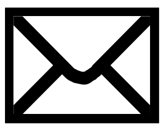
EXE →



Para consultas, bibliografía,

sugerencias metodológicas,

fe de erratas...



email: aulamatematica@gmail.com