Enunciado y resolución de problemas propuestos para las Pruebas de Acceso a la Universidad después de la autorización de la Calculadora gráfica.

ABEL MARTÍN y ROSANA ÁLVAREZ GARCÍA, profesores de Matemáticas y Tecnología, respectivamente, del IES La Ería de Oviedo (Asturias)

ACTIVIDAD PROPUESTA

Se ha realizado un estudio estadístico de mercado para conocer el precio medio de los libros científicos. Para ello se elige una muestra aleatoria formada por 100 libros y se determina que la media muestral es de 3 490 PTAS con una desviación típica de 450 PTAS.

Halla el intervalo de confianza para el precio medio de los libros científicos al nivel del 99%. Justifica lo que haces.

RESOLUCIÓN CON LÁPIZ Y PAPEL

Buscamos el intervalo para la media de una población con desviación típica poblacional desconocida. Los datos proporcionados por el problema vienen dados por:

	Media	Varianza	Tamaño
Población	μ	σ^2	
Muestra	3 490	450^2	N = 100

Si elegimos distintas muestras de una población y calculamos sus medias y desviaciones típicas obtendremos distintos valores en cada muestra. Los distintos valores de la media dan una nueva variable aleatoria que representaremos por $\overline{X}$ y cuya distribución se conoce como distribución de las medias muestrales, cumpliendo las siguientes características:

- La media: μ
- La desviación típica: $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- A medida que crece el tamaño muestral la distribución de $\overline{X}$ se aproxima a una normal

La distribución de la variable $\overline{X}$ es, por tanto, una $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Como no conocemos σ, y el tamaño muestral es grande (n ≥ 30), aproximamos la desviación típica poblacional con la cuasidesviación:

$$\overline{X} \Rightarrow N\left(\mu, \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{donde } \hat{S} = \frac{n}{n-1}\cdot S^2$$

Si tipificamos nos queda:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}}$$

Buscamos un intervalo que contenga el parámetro poblacional μ y, por tanto, el estadístico que lo representa estará situado entre dos valores:

$$-\lambda_\alpha \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \leq \lambda_\alpha$$

Despejamos la media poblacional y obtenemos el intervalo buscado:

$$-\lambda_\alpha \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_\alpha \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

Multiplicamos por (–1) la desigualdad, con el consiguiente cambio de sentido que ello implica, y se sumamos $\bar{x}$ a los 3 miembros:

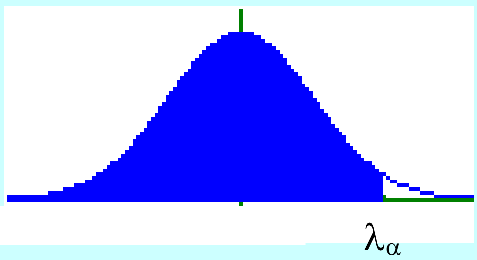
$$\lambda_\alpha \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} + \bar{x} \geq \mu \geq -\lambda_\alpha \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} + \bar{x}$$

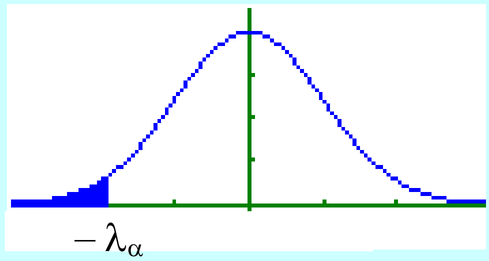
El intervalo buscado será $\left[\bar{x} - \lambda_\alpha \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \lambda_\alpha \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right]$

Donde λ_α es la probabilidad: $P[\,|N(0,1)| \leq \lambda_\alpha] = 1 - \alpha$

Deshacemos el valor absoluto y nos queda:

$$P[-\lambda_\alpha \leq N(0, 1) \leq \lambda_\alpha] = 1 - \alpha$$

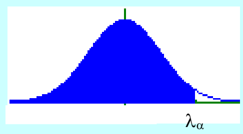




$$P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha] - P[N(0, 1) \leq -\lambda_\alpha] = 1 - \alpha$$

Por ser una distribución simétrica sabemos que:

$P[N(0, 1) \leq -\lambda_\alpha] = 1 - P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha]$

1 – 

Por tanto $P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha] - P[N(0, 1) \leq -\lambda_\alpha] = 1 - \alpha$

$$P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha] - \{1 - P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha]\} = 1 - \alpha$$

$$2 \cdot P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha] - 1 = 1 - \alpha$$

$$P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha] = \frac{1 + 1 - \alpha}{2}$$

$$P[N(0, 1) \leq \lambda_\alpha] = \frac{1 + 0.99}{2}$$

En nuestro caso, como el nivel de confianza es del 99%, es decir,

$$1 - \alpha = 0.99 \quad \Rightarrow \quad F[\lambda_\alpha] = \frac{1.99}{2} = 0.995$$

Buscamos en las tablas el valor de la variable cuya probabilidad es 0.995 y vemos que este valor es:

$$\lambda_\alpha = 2.57$$

Si sustituimos en el intervalo los valores obtenidos a partir de la muestra al nivel de confianza prefijado, obtendríamos:

	Media	Varianza	Cuasivarianza	Nivel de confianza	Tamaño
Muestra	3 490	450^2	$\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s^2 = 204545.45$	$1 - \alpha = 0.99$ $\lambda_\alpha = 2.57$	100

$$\left[3490 - 2.57 \cdot \frac{\sqrt{204545.45}}{\sqrt{100}},\ 3490 + 2.57 \cdot \frac{\sqrt{204545.45}}{\sqrt{100}} \right]$$

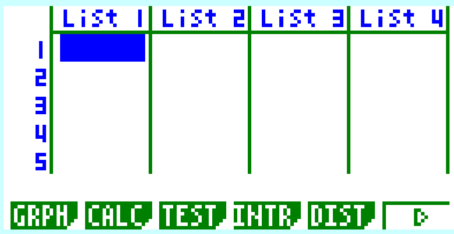
Operamos:

$$[3373.76, 3606.23]$$

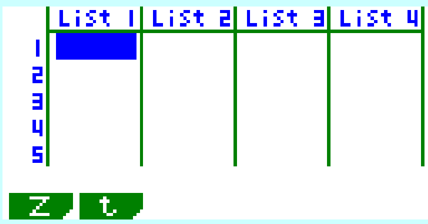
El intervalo de confianza para la media de una población con desviación típica desconocida es por tanto [3373.76, 3606.23]

Pues bien, la calculadora gráfica, a partir de la gama CFX 9850GB PLUS presenta una prestación para la realización de este tipo de problemas, que nos permite pasar directamente a interpretar datos, obviando todo este farragoso entramado de operaciones aritméticas, basándonos en el entendimiento y la comprensión de conceptos, conociendo el significado de los datos del problema para, al final, pasar a interpretar los resultados obtenidos, o bien, simplemente para contrastar los resultados de una manera rápida y aproximada, comprobando si hemos cometido algún error al efectuar los cálculos con lápiz y papel, buscando unas estrategias alternativas para comprobación de hipótesis, más visuales y palpables, diferentes a las habituales.

Entramos en el modo estadística:

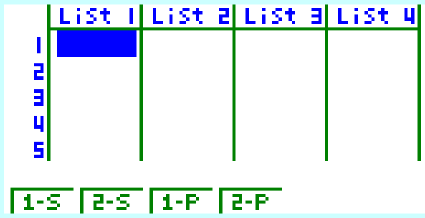
2	

y trabajamos con la opción referida a INTERVALOS DE CONFIANZA

INTR F4	

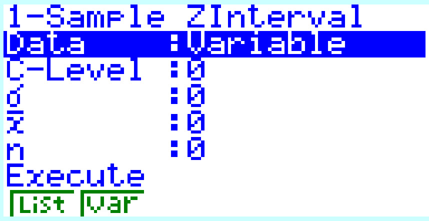
Suponemos que al ser muestras grandes la distribución se puede ajustar a una distribución normal:

Z [F1]



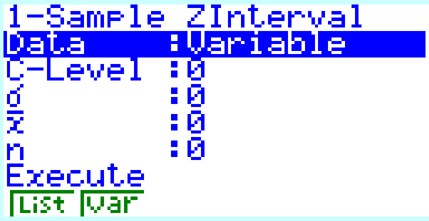
Por ser una muestra

1–S [F1]



Los DATOS con los que trabajamos son los valores de la variable y no listas de datos:

Var [F2]



C - Level: Nivel de confianza: 99%

σ : Desviación típica: 450

$\bar{x}$: Media: 3490

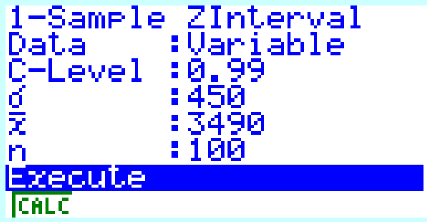
n: Tamaño muestral: 100

[▼] [0] [•] [9] [9] [EXE]

[▼] [4] [5] [0] [EXE]

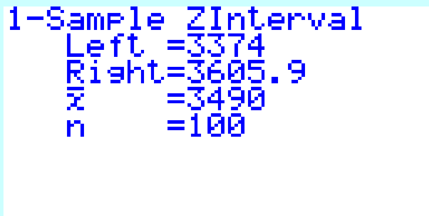
[▼] [3] [4] [9] [0] [EXE]

[▼] [1] [0] [0] [EXE]



Ya solo nos queda calcular el valor del intervalo:

CALC [F1]



El intervalo de confianza para la media de una población con desviación típica desconocida es por tanto [3374, 3605.9]

… En homenaje a nuestra querida peseta.