

# Cinemática con Calculadora Gráfica

M<sup>a</sup> Oliva San Martín Fernández. Profesora de Matemáticas IES Mata-Jove (Gijón-Asturias)

Abel Martín. Profesor de Matemáticas del IES Pérez de Ayala (Oviedo-Asturias)

y colaboradores del Departamento Didáctico de CASIO.

De todos es sabido los problemas que tiene el profesorado de Física en determinados temas ya que no existe una conexión adecuada con las programaciones de Matemáticas. En muchos momentos se necesita que el alumno domine herramientas matemáticas para la resolución de problemas, pero no sólo no las domina sino que ni las conoce.

Aquí es donde la calculadora gráfica puede aparecer como elemento auxiliar, ayudando a sortear las dificultades matemáticas del momento.

Vamos a hacer una breve introducción a la cinemática, utilizando como herramienta la calculadora gráfica, pudiendo afrontar problemas desde diversos puntos de vista, utilizando estrategias alternativas que enriquecen el desarrollo del tema. Para ello aprovechamos la facilidad de cálculo que la máquina proporciona y la posibilidades gráficas que ofrece, pudiendo dar al alumno una ida intuitiva y clara de los distintos tipos de movimiento.

## MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (m.r.u.)

### Características de este movimiento.

- Trayectoria en línea recta.
- Velocidad constante a lo largo de la trayectoria.
- Aceleración nula.

### Fórmulas y gráficas asociadas:

$$s(t) = s_0 + v \cdot t$$

$$v(t) = v_0 = \text{cte}$$

$$a = 0$$

s: distancia recorrida.

s<sub>0</sub>: distancia inicial.

v: velocidad.

v<sub>0</sub>: velocidad inicial.

a: aceleración.

**Actividad 1:** Hagamos el estudio de un movimiento rectilíneo y uniforme cuya ecuación de movimiento es:

$$s(t) = 1 + 3t, \quad s(t) \text{ expresada en metros, } t \text{ en segundos}$$

es decir, el de un móvil que parte a 1 metro de distancia del origen y se mueve con una velocidad constante de 3m/s

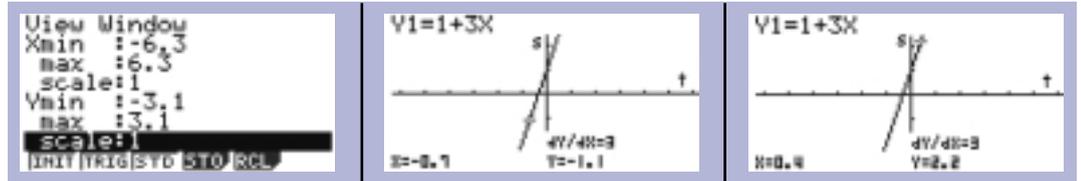
### RESOLUCIÓN:

Introducimos la ecuación de movimiento y añadimos la opción de cálculo de la derivada de la función en cada punto:



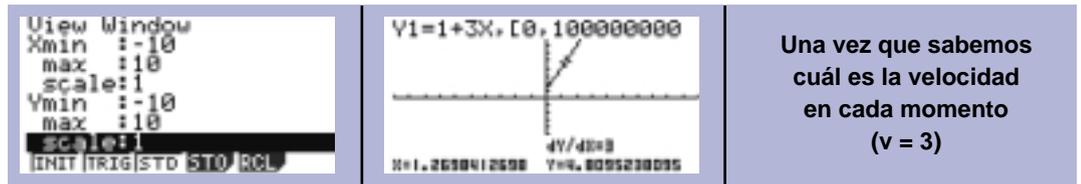
Con la opción trace nos movemos por la gráfica y vemos cómo varía la velocidad con respecto al tiempo.

Cinemática con Calculadora Gráfica



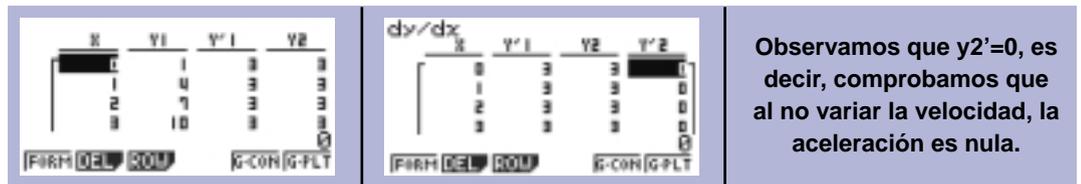
y observamos cuál es la velocidad ( $v = \frac{ds}{dt}$ ) en cada punto:  
 $y' = 3$

aunque, representada en su dominio y modificando la escala, sería:



Una vez que sabemos cuál es la velocidad en cada momento ( $v = 3$ )

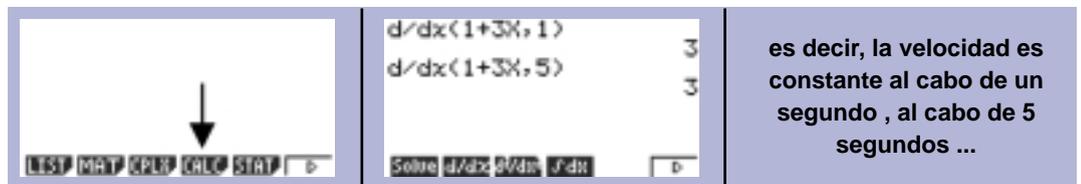
- (1) Introducimos  $y_2 = 3$  que es la velocidad
- (2) Hacemos una tabla de valores donde apreciamos:  
x (tiempo),  $y_1$  (distancia recorrida)  $y_1'$  (velocidad),  $y_2$  (velocidad),  $y_2'$  (aceleración)



Observamos que  $y_2' = 0$ , es decir, comprobamos que al no variar la velocidad, la aceleración es nula.

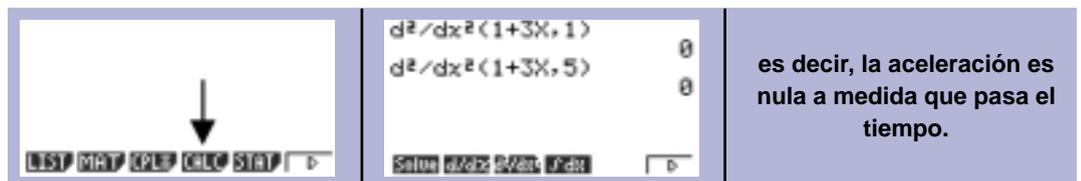
También podemos trabajar en el modo RUN:

- Calculamos la derivada primera (no sería necesario conocer de forma exhaustiva los conceptos y las reglas de derivación) para  $x = 1$  y  $x = 5$  con respecto a "x" con la ayuda de la tecla OPTN (OPCIONES):



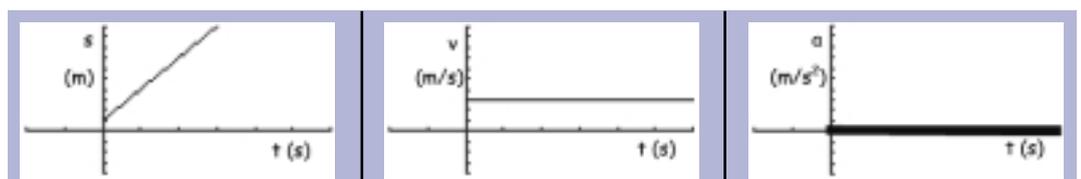
es decir, la velocidad es constante al cabo de un segundo, al cabo de 5 segundos ...

- Calculamos la derivada segunda para  $x = 1$  y  $x = 5$  con respecto a "x", de nuevo con la ayuda de la tecla OPCIONES:



es decir, la aceleración es nula a medida que pasa el tiempo.

Así pues, las funciones representadas, en el dominio correspondiente, con la escala y las unidades indicadas, tienen la siguiente forma:



**MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME ACCELERADO (m.r.u.a.)**

**Características de este movimiento.**

- Trayectoria en línea recta.
- La velocidad aumenta de forma constante con el tiempo.
- Aceleración constante.

**Fórmulas y gráficas asociadas:**

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = v_0 + a t$$

$$a = \text{cte}$$

s: distancia recorrida.  
 s<sub>0</sub>: distancia inicial.  
 v: velocidad.  
 v<sub>0</sub>: velocidad inicial.  
 a: aceleración.

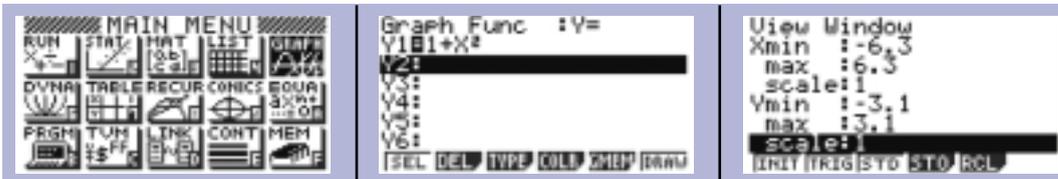
**Actividad 2:** Veamos el estudio de un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado cuya ecuación de movimiento es:

$$s(t) = 1 + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2 t^2 \quad s(t) \text{ expresado en metros, } t \text{ en segundos}$$

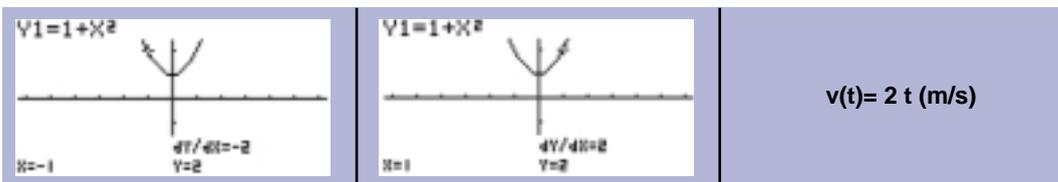
es decir, el de un móvil que parte a un metro de distancia del origen, con velocidad inicial nula (parte del reposo) y se mueve con una aceleración de 2 m/s<sup>2</sup>.

**RESOLUCIÓN:**

Introducimos la ecuación de movimiento  $s(t) = 1 + t^2$



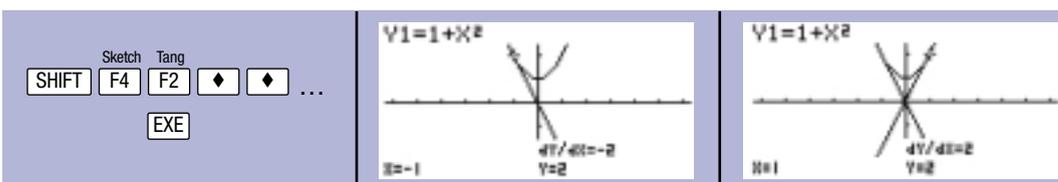
Con la opción trace nos movemos por la gráfica:



Observamos cuál es la velocidad  $[v(t) = \frac{ds}{dt}]$  en cada punto que va cambiando a medida que transcurre el tiempo (proporcionalmente al tiempo)

Si queremos representar la derivada de la función en cada punto (tangente), por ejemplo en

$$x = -1 \quad \text{y} \quad x = 1:$$



Una vez que sabemos la velocidad en cada instante  $V(t) = 2t$

(1) Introducimos  $y_2 = 2x$  que es la velocidad

(2) Hacemos una tabla de valores donde apreciamos:

$x$  (tiempo),  $y_1$  (distancia recorrida),  $y_1'$  (velocidad),  $y_2$  (velocidad),  $y_2'$  (aceleración)



Cinemática con Calculadora Gráfica

		$a(t) = dv(t)/dt = 2 \text{ m/s}^2$
--	--	-------------------------------------

Observamos que  $y_2' = 2$ , es decir, comprobamos que al variar la velocidad, la aceleración permanece constante.

También podemos trabajar en el modo RUN:

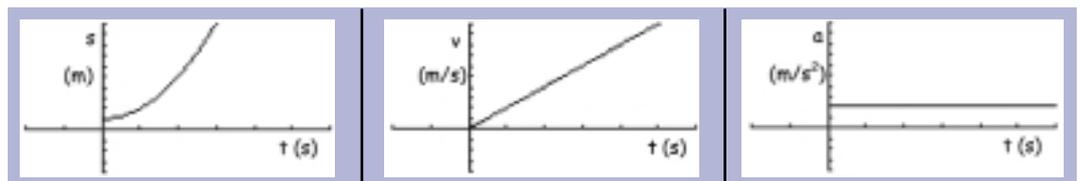
- Calculamos la derivada primera para  $x = 1, x = 2, x = 3, \dots$  con respecto a "x" con la ayuda de la tecla OPCIONES:

		<p>es decir, la velocidad aumenta 2 m/s en cada segundo.</p>
--	--	--------------------------------------------------------------

- Calculamos la derivada segunda para  $x = 1, x = 2, x = 3, \dots$  con respecto a "x" con la ayuda de la tecla OPCIONES:

		<p>es decir el movimiento es uniformemente acelerado a medida que pasa el tiempo. La aceleración es positiva.</p>
--	--	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Así pues, las funciones representadas, en el dominio correspondiente, con la escala y unidades indicadas, tienen la siguiente forma:



Si la aceleración fuese negativa (deceleración) el movimiento se llama **MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE DECELERADO**.

**MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE DECELERADO (m.r.u.d.)**

**Características de este movimiento.**

- Trayectoria en línea recta.
- La velocidad disminuye de forma constante con el tiempo.
- Aceleración constante.

**Fórmulas y gráficas asociadas:**

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = v_0 - a t$$

$$a = \text{cte}$$

- s: distancia recorrida.
- s<sub>0</sub>: distancia inicial
- v: velocidad
- v<sub>0</sub>: velocidad inicial
- a: aceleración

**Actividad 3:** Si lanzamos un objeto hacia arriba (verticalmente) tenemos un movimiento rectilíneo uniformemente decelerado (m.r.u.d.) con deceleración, la de la gravedad,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .



Cinemática con Calculadora Gráfica

El espacio en este caso es altura:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - 1/2 g t^2$$

La velocidad :  $v(t) = v_0 - g t$



**Actividad 4:** Si dejamos caer libremente un objeto (caída libre) se tiene un m.r.u.a. con aceleración positiva  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

El espacio en este caso es altura:

$$h(t) = h_0 + v_0 t + 1/2 g t^2$$

La velocidad :  $v(t) = v_0 + g t$



**Actividad 5:** Determina las constantes de un movimiento uniformemente acelerado ( $s_0, v_0, a$ ), sabiendo que el móvil tiene una velocidad de 17 m/s a los 4 segundos de haber comenzado a contar el tiempo, y que en los instantes 2 y 4 segundos dista del origen 12 y 40 metros respectivamente.

**RESOLUCIÓN:**

Las fórmulas para la velocidad y el espacio son:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Planteamos tres ecuaciones con las tres incógnitas:

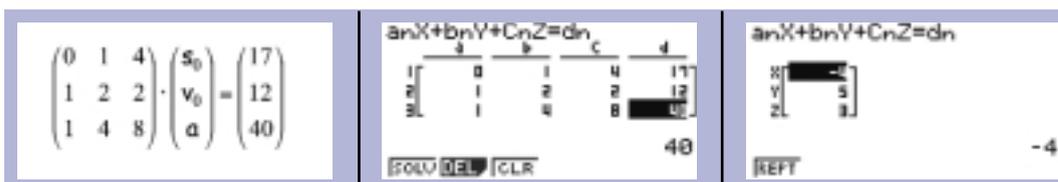
$s_0$ : espacio inicial,  $v_0$ : velocidad inicial,  $a$ : aceleración. Con los datos del problema:

$$v_0 + 4 a = 17$$

$$s_0 + 2v_0 + 2 a = 12$$

$$s_0 + 4v_0 + 8 a = 40$$

Vemos la expresión del sistema en forma matricial y entramos en la opción **EQUA** del menú inicial y resolvemos el sistema



$s_0 = -4m, v_0 = 5 \text{ m/s}, a = 3 \text{ m/s}^2$ .

Reiteramos el hecho de que el largo caminar de la didáctica, con la ayuda de las nuevas tecnologías, simplemente está empezando. A pesar de ello, somos muchos los que estamos trabajando en el tema, con múltiples y variados enfoques. En algunos centros, como el IES Pérez de Ayala de Oviedo (Asturias), estamos llevando a cabo un PROYECTO donde se incluye en el aula la nueva tecnología ClassPad de CASIO, con una herramienta educativa y matemática de última generación, que cuenta con un gran número de prestaciones y ventajas; sus cualidades la hacen un híbrido entre calculadora gráfica(algebraica, ordenador de bolsillo y PDA con lápiz táctil interactivo, todo ello retroproyectable.

Para cualquier duda, intercambio de opiniones, materiales, sugerencias... no dudéis en poneros en contacto con nosotros: [osanmartin@teleline.es](mailto:osanmartin@teleline.es) [abelj@telecable.es](mailto:abelj@telecable.es)

