SISTEMAS DE ECUACIONES, MATEMÁTICAS Y CALCULADORAS.

Marta Martín Sierra. Facultad de Matemáticas. Universidad de Oviedo.
Abel Martín. Dpto. Matemáticas IES Pérez de Ayala de Oviedo.

INTRODUCCIÓN

Parece que fue ayer cuando dábamos nuestros primeros pasos en este tema con la publicación del libro "Cálculo 2000". En aquellos momentos podríamos decir que sólo las calculadoras gráficas resolvían cotidianamente en el aula los sistemas de ecuaciones, ante la atónita mirada del profesor que se echaba las manos a la cabeza: ***"¿Qué voy a hacer yo si la máquina lo resuelve todo?".***

Eso es lo que se pensaba: "**lo resuelve todo…**", pero nada más lejos de la realidad. Si bien se siguen enseñando con total naturalidad métodos con "lápiz y papel" como los de reducción, igualación, sustitución, gráfico, Gauss, Cramer… éstos son complementados cada día por más docentes con la utilización de máquinas, desde las más sencillas (algunas científicas incorporan esta utilidad) a las más sofisticadas (gráficas y con álgebra simbólica).

A lo largo del artículo comentaremos una propuesta didáctica de cómo se puede desarrollar este tema utilizando una metodología más innovadora, abordando los diversos y "clásicos" objetivos incluidos en nuestras programaciones.

OBJETIVO 1: "SABER RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES".

Con la enseñanza de diferentes métodos algebraicos, nos adentramos en la práctica que nos lleve a la resolución de sistemas con dos, tres o más incógnitas. Se trata de buscar la soltura en el manejo de las ecuaciones y muchas veces la dificultad radica en no olvidarnos de multiplicar un signo o escoger el método adecuado. No dejan de ser unas técnicas repetitivas, llenas de sumas, restas, multiplicaciones…

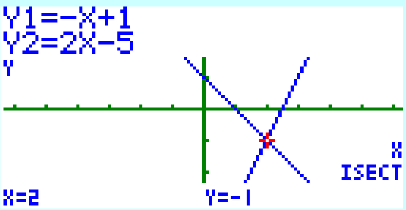
Aunque hay que conocer estos métodos, no debemos de privar al alumno del dominio de otros más sencillos, con la ayuda de máquinas, pues los objetivos del momento cambian y pueden ser otros, como veremos a continuación, o simplemente para darle al alumno la autonomía suficiente que le permita comprobar si ha resuelto bien el ejercicio.

OBJETIVO 2: "INTERPRETAR GEOMÉTRICAMENTE UN SISTEMA DE ECUACIONES"

La resolución de sistemas debe ir acompañada siempre, desde la más temprana edad, del esquema mental del binomio "sistema de ecuaciones - significado geométrico", y entender el porqué de aquellas que tienen solución, las que no tienen solución o las que tiene infinitas soluciones:

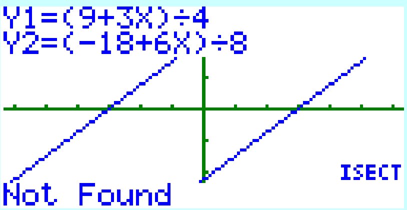
Por ejemplo: "DOS INCÓGNITAS - RECTAS"

$$\begin{cases} -x-y=-1 \\ -2x+5=-y \end{cases}$$



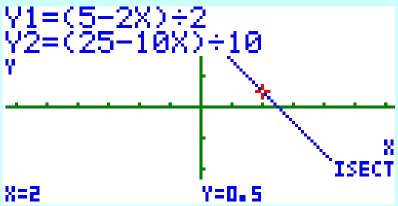
Una solución

$$\begin{cases} 3x-4y=-9 \\ -6x+8y=-18 \end{cases}$$



Sin solución

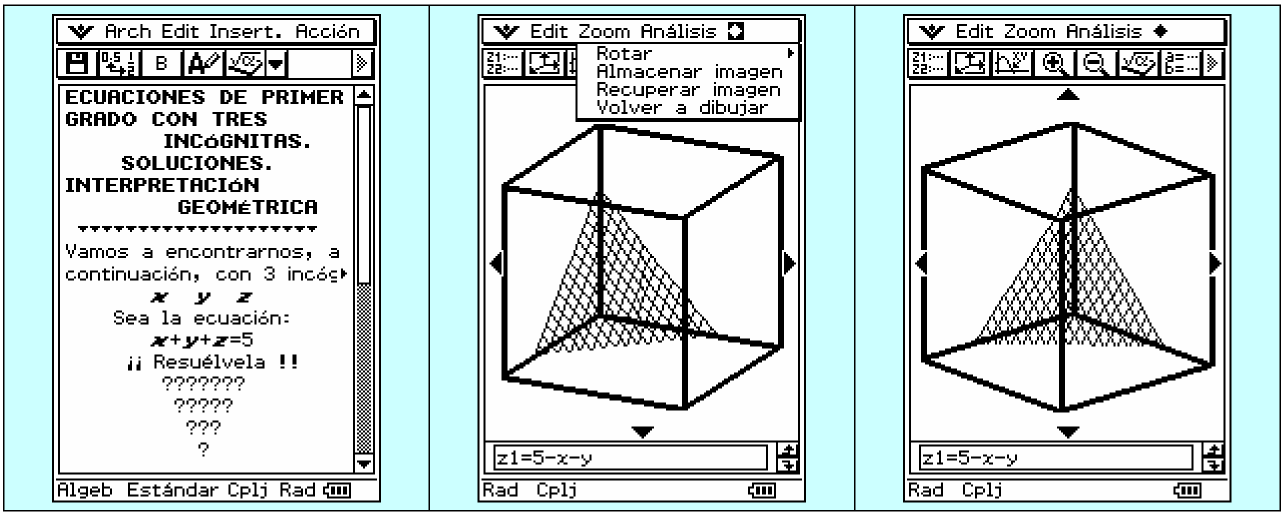
$$\begin{cases} 2x+2y=5 \\ 10x+10y=25 \end{cases}$$



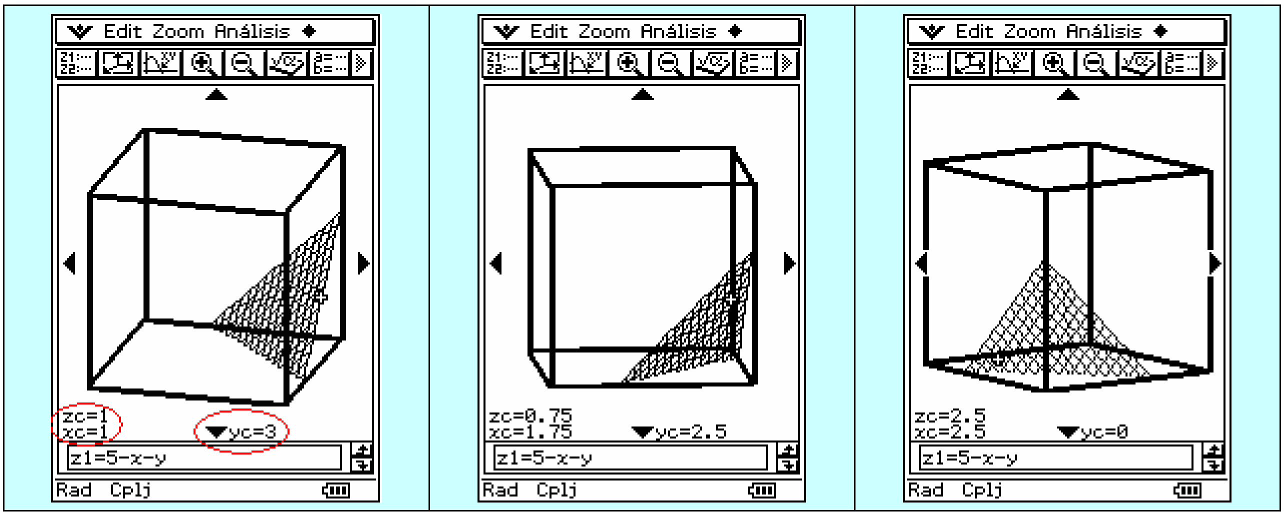
Infinitas soluciones

Para el Bachillerato dejamos la interpretación con sistemas de 3 incógnitas. Aquí la calculadora gráfica puede resultar una herramienta visual, intuitiva e impactante del significado geométrico.

Comenzamos planteando la solución a una ecuación, por ejemplo: x + y + z = 5



Con ClassPad 300 es muy sencillo observar cómo se trata de un PLANO. Utilizamos la aplicación de "rotar" en todas sus posibilidades, por ejemplo, de "izquierda a derecha". En este momento el alumno interioriza la idea de ecuación de 3 incógnitas y, con la opción "**trazo**" incluso se pueden comprobar las infinitas ternas de valores que verifican la ecuación.



OBJETIVO 3: "ESTIMULAR LA CAPACIDAD DE INVESTIGACIÓN".

001	Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} x-y=-1 \\ x+2y=4 \\ 6x-y=0 \end{array}\right.$

Este es un ejercicio muy interesante para plantear en clase una vez que manejan con soltura la máquina y los algoritmos con lápiz y papel. Tanto es así que se resuelve de nuevo de forma irreflexiva. Se produce un descuido en los conceptos debido al exceso de confianza:

☞ Unos lo intentan resolver con la calculadora, directamente, pero al indicarle "2 incógnitas", aparecen sólo 2 ecuaciones y ya no saben qué hacer pues en el enunciado aparecen tres.

☞ En este momento es cuando hay que comenzar a pensar, favoreciendo la capacidad de investigación. Los alumnos más "cuadriculados" lo resuelven con LÁPIZ y PAPEL, por el método de Gauss, y suelen tener éxito.

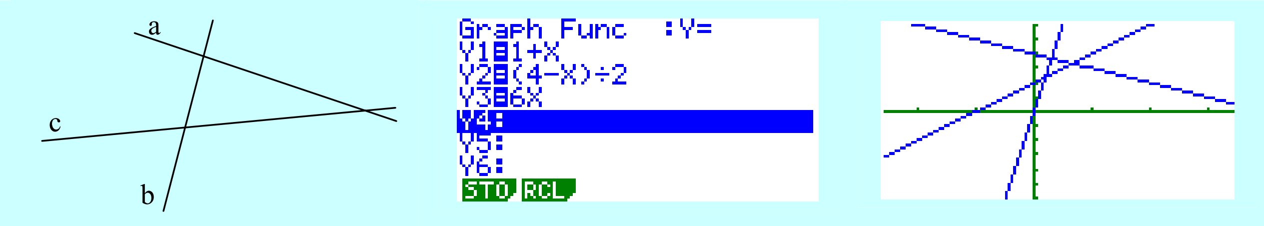
☞ Otros piensan realmente lo que se está pidiendo y acuden al concepto de sistema de ecuaciones. Resuelven los diferentes sistemas que se pueden obtener tomando las ecuaciones de 2 en 2, por cualesquiera de los métodos ya estudiados: reducción, igualación, sustitución, Gauss, con calculadora, etc. Luego comprueban si en los distintos sistemas se obtienen los mismos resultados.

☞ Alguno, excepcionalmente, solventa el sistema formado por las 2 primeras ecuaciones y lo sustituye en la tercera para ver si se verifican los valores obtenidos.

☞ Prácticamente nadie lo resuelve gráficamente, con la calculadora gráfica, que es un método adecuado para percibir e interpretar correctamente los resultados.

SOLUCIÓN: No hay ningún valor de "x", "y" que verifique simultáneamente las 3 ecuaciones.

SISTEMA INCOMPATIBLE



Geométricamente se trata de 3 RECTAS que no tienen ningún punto en común

OBJETIVO 4: "ESTUDIAR LA COMPATIBILIDAD Y DISCUTIR SISTEMAS CON PARÁMETROS".

002	Discute y resuelve, usando el método de Gauss, con LÁPIZ y PAPEL, el siguiente sistema que depende del parámetro "**a**".	$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ y+z&=2 \\ y+2z&=a \end{aligned}\right\}$

RESOLUCIÓN con lápiz y papel

$$\begin{array}{r} \\ (-1) \\ (1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Fijamos la 1ª y 2ª filas y modificamos la 3ª con las operaciones indicadas a la izquierda.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

Analizamos la 3ª fila:

z = a - 2

Analizamos la 2ª fila:

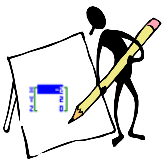
y + z = 2 → y = 2 - z → y = 2 - (a - 2) → y = 2 - a + 2

y = 4 - a

Analizamos la 1ª fila:

x + y + z = 0 → x = - y - z → x = - (4 - a) - (a - 2) → x = - 4 + a - a + 2

x = - 2



SOLUCIÓN GENERALIZADA:

(- 2 , 4 - a , a - 2)

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

Algunas soluciones podrían ser:

☞ Para a = 0

(- 2 , 4 - a , a - 2) → (- 2, 4, - 2)

☞ Para a = 1

(- 2 , 4 - a , a - 2) → (- 2, 3, - 1)

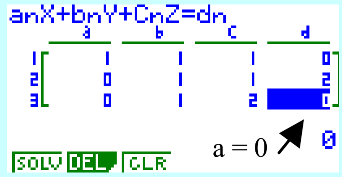
☞ Para a = 2

(- 2 , 4 - a , a - 2) → (- 2, 2, 0)

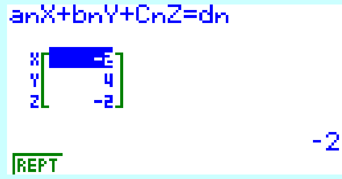
RATIFICACIÓN de resultados con la CALCULADORA GRÁFICA

Vamos a comprobar con una calculadora gráfica, por ejemplo los de la gama CFX 9850G o científica FX 570 MS de CASIO, sustituyendo "**a**" por dichos valores en el sistema del enunciado, si las respuestas obtenidas son las esperadas:

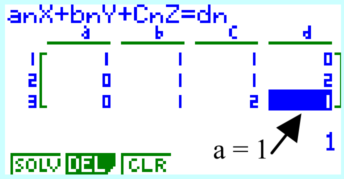
a = 0 → **(- 2, 4 - a, a - 2)** → (- 2, 4, - 2)



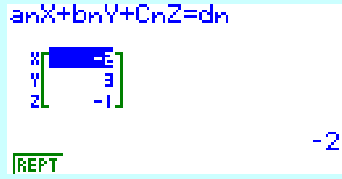
SOLV
F1



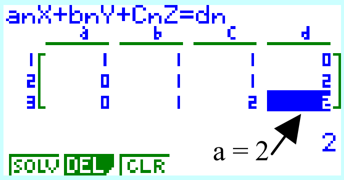
a = 1 → **(- 2, 4 - a, a - 2)** → (- 2, 3, - 1)



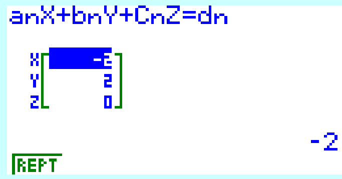
SOLV
F1



a = 2 → **(- 2, 4 - a, a - 2)** → (- 2, 2, 0)

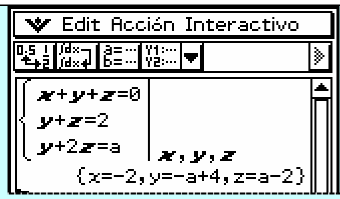


SOLV
F1



Como se puede observar, se confirman nuestros resultados obtenidos con LÁPIZ Y PAPEL.

También se puede utilizar Classpad, en cuyo caso se obtienen directamente los resultados y hace de maestro corrector de nuestros cálculos.



La calculadora es una herramienta que permite profundizar en la interpretación y el conocimiento de lo que realmente se está haciendo cuando resolvemos este tipo de ejercicios. Para la comprobación de resultados hay que reflexionar y entender muy bien los conceptos implicados.

OBJETIVO 5: "TRANSCRIBIR CORRECTAMENTE UN PROBLEMA EXPRESADO EN LENGUAJE USUAL AL LENGUAJE ALGEBRAICO".

Para el desarrollo del artículo vamos a basarnos en un ejercicio cualquiera, por ejemplo el siguiente, propuesto en las pruebas de SELECTIVIDAD de Madrid, en junio de 1991.

003	Se juntan 30 personas entre hombres, mujeres y niños. Se sabe que entre los hombres y las mujeres duplican al número de niños. También se sabe que entre los hombres y el triple de las mujeres exceden en 20 al doble de niños. Plantear un sistema de ecuaciones que permita averiguar el número de hombres, mujeres y niños. Resolver el sistema de ecuaciones planteado.

Aquí ya se ratifica claramente que la calculadora no lo hace todo. Es el alumno el que tiene que empezar a realizar la traducción.

Existe la costumbre de pasar a plantear directamente el problema mediante ecuaciones. Metodológicamente sugerimos que, cuando se inicien estas actividades, salgan del aula 4 alumnos, mientras que la clase comienza el ejercicio. Entre todos rápidamente formalizamos el siguiente **PLANTEAMIENTO:**

$$\begin{gathered} x + y + z = 30 \\ x + y = 2z \\ x + 3y - 20 = 2z \end{gathered}$$

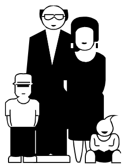
Al mandar pasar a 2 alumnos y decirles que nos lean e insinúen un posible enunciado, es decir, el proceso inverso a lo acostumbrado, no suelen saber qué contestar; algunos, con mucha imaginación, balbucean ciertas cosas, normalmente incoherentes y se acaban rindiendo ante el estupor del resto de la clase; ¡claro!, ¿qué es la x? ¿qué es la y?... Es el momento en el que el profesor les apunta y hace ver la necesidad de comenzar comentando el significado de las incógnitas, así que añadimos en el encerado la DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS

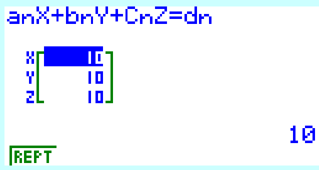
x ≡ "Número de hombres". **y** ≡ "Número de mujeres". **z** ≡ "Número de niños".

Cuando entran los dos alumnos restantes, el posible enunciado toma forma rápidamente, es mucho más fluido. Dependiendo de la dificultad, les puede resultar incluso sencillo. El convencimiento de la importancia de iniciar un problema **determinando las incógnitas** es general y total, aunque siempre nos encontraremos con el inmovilista, cegado por el aprendizaje tradicional que le han transmitido.

A continuación es cuando iniciamos la resolución del sistema y tomamos la decisión de hacerlo con "lápiz y papel" (si es el "OBJETIVO 1" el que estamos trabajando) o con la ayuda de la calculadora (si son el resto de objetivos los que estamos consolidando). Al final, hagamos como lo hagamos, siempre obtendremos la SOLUCIÓN:

x = 10
y = 10
z = 10





OBJETIVO 6: "INTERPRETAR Y ANALIZAR CRÍTICAMENTE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN LA RESOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES, EXPRESANDO CORRECTAMENTE LA SOLUCIÓN".

La actividad anterior está especialmente propuesta para trabajar el "OBJETIVO 5", pues la solución es sumamente sencilla; es inmediato y superfluo interpretar o analizar los resultados: "**Habrá 10 hombres, 10 mujeres y 10 niños**".

Los alumnos no ven la necesidad de ocuparse en el nuevo objetivo. Para ello presentamos ejercicios especialmente preparados para trabajarlo. Veamos algunos de ellos.

004	Una tienda posee 3 tipos de conservas, A, B y C. El precio medio de las 3 conservas es de 0.90 €. Un cliente compra 30 unidades de A, 20 de B y 10 de C, debiendo abonar 50.49 €. Otro compra 20 unidades de A y 25 de C y abona 41.47 €. Calcula el precio de una unidad A, otra de B y otra de C.

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS

x ≡ "Precio en € de la conserva A".

y ≡ "Precio en € de la conserva B".

z ≡ "Precio en € de la conserva C".

PLANTEAMIENTO:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 0.90 \\ 30x + 20y + 10z = 50.49 \\ 20x + 25z = 41.47 \end{cases} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} x + y + z = 2.7 \\ 30x + 20y + 10z = 50.49 \\ 20x + 25z = 41.47 \end{cases}$$

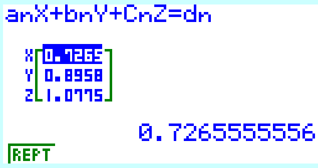
RESOLUCIÓN CON LÁPIZ Y PAPEL O CON CALCULADORA GRÁFICA

SOLUCIÓN:

x = 0.7265

y = 0.8958

z = 1.0775



Curiosamente ésta es la solución que se aporta. Es muy raro el caso en el que alguien vaya más allá y lo habitual es que cuando se obtienen los anteriores valores se da por acabado el problema.

Una vez resuelto es muy importante resaltar que éste aún no ha finalizado, ni muchísimo menos. El alumno está convencido de que una vez calculados los valores de "x", "y", "z" su tarea ya ha terminado, sin saber que llega la parte más "reflexiva", innovadora y dinámica, que nos permite entablar un debate y un intercambio de opiniones en la clase: el comentario y análisis crítico de los resultados obtenidos.

Para ello hay actividades a las que no se les puede sacar ningún partido y no cubren nuestras expectativas ni nuestros objetivos pero hay otras que sí dan mucho "juego".

Mi propuesta es ir alternando tareas propensas a la discusión con otras en las que simplemente el resultado es "el resultado", sin ningún tipo de cavilación.

Este podría ser un buen ejercicio inicial para trabajar este "OBJETIVO 6". Es curioso que si se deja al alumno finalizarlo es muy posible que ni uno solo llegue a la conclusión de que esa caja registradora que estamos viendo redondea con dos decimales y por lo tanto hay que tomar decisiones, reflexionar a analizar el resultado final:

"Los precios de cada unidad A, B y C son, respectivamente, 0.73€, 0.90€ y 1.08€".

Si nos fijamos, la práctica totalidad de las programaciones didácticas de los Departamentos hablan de que debe tenerse en cuenta que la resolución de forma mecánica de ejercicios de aplicación inmediata no responde al sentido de los criterios de evaluación marcados para esta unidad didáctica.

Así que vamos a proponer algunos ejercicios que permitan potenciar este último objetivo con el uso de la calculadora; obviaremos el planteamiento y la resolución, para detenernos en la solución y el análisis crítico de los resultados.

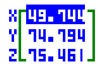
005	Un estado compra 758 000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 30, 28 y 25 $ el barril, respectivamente. La factura total asciende a 17 millones de $. Si del primer suministrador recibe el 24% del total del petróleo comprado, plantea un sistema de ecuaciones que te permita determinar cuál es la cantidad comprada a cada suministrador y resuelve el problema.

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS		SOLUCIÓN:
x ≡ "Número de barriles comprados al suministrador A" **y** ≡ "Número de barriles comprados al suministrador B" **z** ≡ "Número de barriles comprados suministrador C"		x = **181 920** y = **- 953 200** z = **1 529 280**

ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

En el contexto del problema, jamás se podrían dar SIMULTÁNEAMENTE los datos del enunciado pues no podemos obtener número de barriles negativos. Tras un debate dejamos una puerta abierta al hecho de que sólo se podría dar una solución si considerásemos que el suministrador B devuelve el dinero correspondiente a 953 200 barriles.

006	Una empresa cinematográfica dispone de tres salas A, B y C. Los precios de entrada a cada una de estas salas son 0.6, 1.2 y 1.8 €, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 255.43 € y el número total de espectadores que acudieron fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubiesen asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se obtendrá una recaudación de 240.4 €. Calcúlese el número de espectadores que acudió a cada sala.

DETERMINACIÓN DE INCÓGNITAS	SOLUCIÓN:
x ≡ "Número de espectadores que fueron a la sala A" y ≡ "Número de espectadores que fueron a la sala B" z ≡ "Número de espectadores que fueron a la sala C"	anX+bnY+CnZ=dn  49.74444444 REPT

ANÁLISIS CRÍTICO DE LOS RESULTADOS

A la vista de los resultados, no se podrían dar simultáneamente las circunstancias del enunciado ya que obtenemos números NO enteros y se supone que el número de espectadores asistentes en cada sala es un número entero y positivo.

En resumen, y como hemos visto a lo largo del artículo, en este tema la calculadora NO LO HACE TODO. Puede eliminar la parte tediosa de los cálculos numéricos y permitir más tiempo para hacer matemáticas, para pensar…

En la matemática, si bien siempre se reconoció como una CIENCIA EXACTA, ha de quedar clara la idea de que ha de permitir fomentar la discusión, el contraste de opiniones, la reflexión, el análisis, los diferentes puntos de vista, así llegar al enriquecimiento de la práctica docente diaria en el aula.

Reflexionemos sobre el siguiente texto demoledor que aparece en las pruebas PAU de matemáticas de la Universidad de Oviedo donde, curiosamente, la calculadora gráfica está absolutamente prohibida:

"… se harán prevalecer siempre los planteamientos y desarrollos correctos sobre los cálculos matemáticos, así como se valorarán los razonamientos que utilice el alumno tanto en la resolución de problemas como en las respuestas a cuestiones teóricas"

Esperamos tu visita en www.classpad.tk

También podrás ampliar conocimientos a través del curso a distancia que organizaremos a partir de octubre.