

Enseñar ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL en ESO y Bachillerato

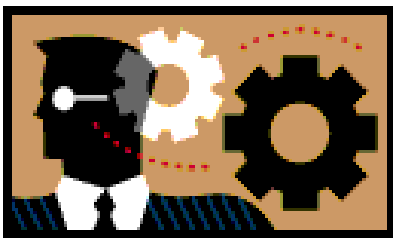
Abel Martín

Profesor de Matemáticas del IES Pérez de Ayala (Oviedo - Asturias)

Rosana Álvarez García

Profesora de Tecnología del IES Santa Bárbara (La Felguera - Asturias)
y colaboradores del Departamento Didáctico de CASIO.

Como ya hemos señalado en un artículo anterior, "la enseñanza de la Estadística ha de cambiar inevitablemente su metodología y sus objetivos con la aparición de las máquinas de calcular", tanto a nivel científico como gráfico, tal y como se está haciendo en todos los países "desarrollados".



El objetivo fundamental no debe de circunscribirse a la realización de largos y tediosos cálculos matemáticos, dejando para el final, como anécdota, lo realmente importante:

ii TRATAR DATOS, BUSCAR CONCLUSIONES,
TOMAR DECISIONES...y, en definitiva, PENSAR!!

La estadística está adquiriendo en la sociedad un papel preponderante, cada día más presente en los diferentes planes de estudios, desde la enseñanza Primaria hasta la Secundaria y, sobre todo, en la Universitaria de todos los países, con el inconveniente de que la investigación para apoyar su didáctica está avanzando de forma muy lenta.

CONTENIDOS:

No vamos a enumerarlos pues son de todos conocidos, basta con mirar cualquier libro de texto. Donde nos vamos a detener un poco es en los dos apartados siguientes, objetivos y metodología, sugiriendo modificaciones y propuestas de nuevos enfoques.

OBJETIVOS.

- Reconocer una variable estadística bidimensional.
- Distinguir entre dependencia funcional y dependencia estadística de variables.
- Saber representar una distribución bidimensional mediante una nube de puntos.
- Interpretar la correlación como una medida de relación lineal existente entre dos variables.
 - Reconocer las rectas de regresión como mejor ajuste a una nube de puntos.
 - Calcular la ecuación de las rectas de regresión entre dos variables.
 - Realizar predicciones a partir de una recta de regresión cuando sea factible.
- Facilitar la resolución de problemas, haciendo posible que el alumno dedique mayor tiempo al análisis de la información inicial, a la toma de decisiones sobre las acciones a realizar, a la verificación y análisis crítico de los resultados, verdadero objetivo de los cursos preuniversitarios y universitarios.
 - Incorporar un elemento motivador como instrumento didáctico.
 - Posibilitar la ampliación de contenidos.

- Proporcionar métodos alternativos a la resolución de problemas, estimulando la capacidad de investigación del alumnado.
- Desarrollar la capacidad del trabajo autónomo, pudiendo comprobar resultados, confirmar conjeturas, sin la constante supervisión del profesor.
 - Fomentar el trabajo de grupo y la discusión.
 - Buscar una clase más participativa y reflexiva.
 - Eliminar, en lo posible, la carga que supone la gran cantidad de cálculos matemáticos para llegar al dato final, a aquel que nos permite tomar una decisión, hecho este que, en muchas ocasiones, es el objetivo fundamental perseguido.
 - Ejercitar y educar la mente para que el alumno, de forma espontánea, sea capaz de PENSAR.

METODOLOGÍA



Se comienza la actividad planteando a los alumnos una investigación sobre una situación de su entorno cotidiano, como por ejemplo:

- ¿Se puede descubrir alguna relación entre la estatura de las chicas y los chicos (por separado) y las estaturas de sus respectivas madres?.

- ¿Tiene relación la altura de los propios alumnos de la clase y el porcentaje de aciertos en lanzamientos a diferentes distancias a canasta en baloncesto?.

El alumno debe planificar la obtención de los datos, representarlos en forma de tablas de frecuencias, representarlos gráficamente en diagramas de dispersión...

Ante la comparación de las diversas nubes de puntos así obtenidas, el alumno debe hacer una primera interpretación intuitiva de la relación entre las variables, en cada caso, analizando si esa relación es lineal o no; si la relación es directa o inversa, si, con la información suministrada por la nube de puntos, se podría interpolar o extrapolar algún resultado concreto, haciendo hincapié en que en ESTA ETAPA se trata siempre del estudio de relaciones lineales.

Los alumnos deben asociar, identificar y relacionar, al margen de la investigación inicial, diferentes nubes de puntos con distintas situaciones.

A partir del estudio de las nubes de puntos obtenidas, el profesor introduce el concepto de correlación y el coeficiente de correlación como medida del grado de relación lineal entre las variables. El alumnado debe interpretar el significado de los distintos valores y signos del coeficiente de correlación y descubrir el tipo de relación entre las variables ante dichas situaciones.

Entre varias nubes de puntos y/o situaciones y varios coeficientes de correlación el alumno debe asignarlos correctamente.

Se buscarán mediante, métodos gráficos, rectas que se ajusten a las distribuciones bidimensionales estudiadas y relacionarán las medias de las dos variables con la recta que más se ajuste. Mediante esta aproximación intuitiva el profesor introduce el concepto de recta de regresión. También es importante que el alumno realice extrapolaciones utilizando la recta de regresión, estimando los márgenes de error posible.

En la planificación y desarrollo del tema cabe señalar dos niveles:

(a) 4º de ESO, donde en ningún momento se pretende que el alumno realice cálculos complejos para determinar el coeficiente de correlación, ni los coeficientes de la recta de regresión, ni la propia recta de regresión... de forma mecánica. El objetivo FINAL es ENTENDER los conceptos y APLICARLOS a través del análisis y la reflexión, para ser capaces de realizar estimaciones de estos coeficientes y, en todo caso, calcularlos utilizando como herramienta auxiliar una calculadora científica o gráfica.

(b) Primero de Bachillerato, donde todo lo anterior se acompañará de la justificación mediante los CÁLCULOS MATEMÁTICOS correspondientes. En este caso las calculadoras permitirán comprobar y contrastar los resultados obtenidos.

Para consolidar los conceptos introducidos se realizará:

- Un **trabajo de investigación** (tema libre) acerca de la comprobación del grado de relación entre dos variables, que debe culminar con la realización de un informe completo con todas las conclusiones y análisis obtenidos, simplificando lo más posible los cálculos matemáticos, utilizando las herramientas mecánicas habituales del aula, así como un breve comentario de lo que se está estudiando, con investigación bibliográfica, dándole un carácter transversal al tema y a la asignatura.

- Un **cuestionario de preguntas cortas** de autoevaluación, que permitirán comprobar el grado adquirido en la comprensión de los contenidos del tema.

A continuación propondremos diversos modelos de actividades en esta línea que pueden servir para dar ideas al profesorado, auténtico protagonista del enfoque diario en el aula.

Para presentar el trabajo hemos escogido la gama de calculadoras gráficas FX 9750G, FX 9750G PLUS, CFX 9850G ... de CASIO por ser las de mayor difusión en el mercado, así como la calculadoras científicas fx 570MS y fx 991MS.

EVALUACIÓN

- Trabajo de investigación
- Prueba objetiva escrita (según el nivel) en la que incluiremos preguntas indagatorias, tipo test.



MODELO DE ACTIVIDAD (I)

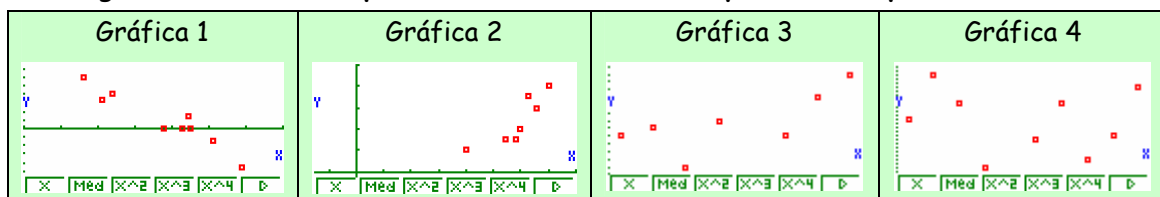
Analiza los siguientes ejemplos donde aparecen dos variables y propón un posible valor de "r" en cada uno de los casos.

- 01 Peso colgado de un muelle y longitud del alargamiento de éste.
- 02 Peso de una persona y su estatura.
- 03 Crecimiento de una planta y número de minutos diario que se habla con ella.
- 04 El mes de nacimiento y la altura de un individuo.
- 05 Número de miembros de una familia y presupuesto mensual de comida.
- 06 Lugar que ocupan los equipos en la clasificación final y número de partidos ganados.
- 07 Lugar que ocupan los equipos en la clasificación final y número de partidos perdidos.
- 08 Lugar que ocupan los equipos en la clasificación final y número de partidos empatados.

- 09 Pintura empleada y superficie pintada.
- 10 La cantidad de una determinada vitamina añadida en la dieta y la altura de los individuos.
- 11 La media de la altura de los progenitores y la altura de los hijos.
- 12 El número de horas estudiadas y las notas obtenidas en una asignatura.
- 13 El número de hermanos y las notas obtenidas.
- 14 Las notas obtenidas en Matemáticas y el peso de una alumna.
- 15 Dinero invertido en la publicidad "todos contra el fuego" y número de incendios.
- 16 Dinero invertido en publicidad de una marca deportiva y ventas realizadas.
- 17 El número de pulsaciones y la edad.
- 18 Cantidad de dinero obtenido por un capital, a rédito constante, con el paso del tiempo.
- 19 Índice de mortalidad de un país y su renta per cápita.
- 20 Longitud de la mano y longitud del pie.
- 21 Velocidad y tiempo que tarda en recorrer una distancia un vehículo.

MODELO DE ACTIVIDAD (II)

Asigna a cada nube de puntos la correlación lineal que le corresponde:



(a) $r = 0.84$ (b) $r = -0.15$ (c) $r = -0.95$ (d) $r = 0.71$

MODELO DE ACTIVIDAD (III)

Las estaturas de 10 chicas y de sus respectivas madres son las siguientes, expresadas en centímetros:

Estatura de hijas	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178
Estatura de madres	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172

(a) ¿Cuántos individuos de la muestra y qué porcentaje hay, en realidad, en el intervalo $(\bar{x} - Sx, \bar{x} + Sx)$?

(b) ¿Cuántos individuos de la muestra y qué porcentaje hay, en realidad, en el intervalo $(\bar{y} - Sy, \bar{y} + Sy)$?

(c) Interpreta, analiza y compara los resultados obtenidos acerca de la estatura de las hijas y la estatura de las madres:

$n, \Sigma x, \bar{x}$, intervalo $(\bar{x} - Sx, \bar{x} + Sx)$, $\Sigma y, \bar{y}$, intervalo $(\bar{y} - Sy, \bar{y} + Sy)$.

(d) ¿Cómo se denomina la varianza conjunta de las variables "x" e "y"? Calcula el valor de dicho parámetro e interpreta su significado.



(e) Dibuja la nube de puntos correspondiente y comenta de forma intuitiva, a la vista de la misma, la relación que se estima hay entre ambas variables:

(f) Cuantifica, de forma matemática y precisa, la relación existente entre ambas variables. Justifica matemáticamente la respuesta.

(g) Calcula la ecuación de la recta de regresión de "y" sobre "x". Justifica matemáticamente la respuesta.

(h) Dibuja la recta de regresión de "y" sobre "x".

(i) Si una mujer que mide 1.63 m tiene una hija, ¿cuánto se espera que mida ésta?. Justifica matemáticamente la respuesta.

(j) Comenta la fiabilidad de las predicciones.

(k) Calcula la ecuación de la recta de regresión de "x" sobre "y". Dibújala.

(l) Si una chica mide 1.70 m, ¿cuánto se espera que mida la madre?. Justifica matemáticamente la respuesta.

TODAS LAS RESPUESTAS DEBERÁN DE INCLUIR, SIEMPRE QUE SEA POSIBLE,
LA JUSTIFICACIÓN MATEMÁTICA CORRESPONDIENTE

PROPUESTA DE RESOLUCIÓN con LÁPIZ Y PAPEL, CALCULADORA GRÁFICA Y CALCULADORA CIENTÍFICA.

DOS OPCIONES:

(1) Primero miramos si sólo nos preguntan una cuestión acerca de la estimación de una variable (a la que llamaremos "y") sabiendo el valor de la otra (a la que llamaremos "x").

(2) En el caso de preguntarnos dos cuestiones diferentes, determinamos cuál va a ser la v.e. "x" y quién la v.e. "y". Aquí vamos a estudiar la estatura de las hijas (la llamaremos variable dependiente "y") en función de la estatura de las madres (la llamaremos variable independiente "x").

Introducimos en la calculadora los pares de datos con su correspondiente frecuencia...

List 1	List 2	List 3	List 4
1	163	158	
2	155	162	
3	160	164	
4	161	165	
5	164	168	

List 1	List 2	List 3	List 4
6	158	169	
7	175	172	
8	169	172	
9	166	174	
10	172	178	

Entramos en el modo estadística y adecuamos las listas a las variables.

CALC SET
F2 F6

Estudiamos sólo las opciones
que comienzan por **2VAR**
(variables bidimensionales)

```
1Var XList :List1
1Var Freq  :1
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq  :1
```

2VAR
EXE F2

... obteniéndose los siguientes resultados

```
2-Variable
x =164.3
y =164.3
Σx =270301
Σy =270301
x̄n =5.96741149
ȳn =5.96741149
n =10
```

```
2-Variable
y =168.2
Σy =1682
Σy² =283242
ȳn =5.74108003
ȳn-1=6.05162971
Σxy =276591
```

```
2-Variable
ȳn-1=6.05162971
Σxy =276591
minX=155
maxX=175
minY=158
maxY=178
```

A continuación, ya estaríamos en disposición de interpretar, debatir y reflexionar acerca de los resultados obtenidos en las estaturas de las diez chicas y de sus respectivas madres, evitando los tediosos, aburridos e interminables cálculos aritméticos, dedicando más tiempo al análisis de los diferentes conceptos y conclusiones que encierra cada uno de dichos valores.

(a) ¿Cuántos individuos de la muestra y qué porcentaje hay, en realidad, en el intervalo...

$$(\bar{x} - Sx, \bar{x} + Sx)?$$

Intervalo estatura de las madres → (158.33, 170.27)

Individuos → 6 madres

Porcentaje → $6/10 = 0.60 \rightarrow 60\%$

(b) ¿Cuántos individuos de la muestra y qué porcentaje hay, en realidad, en el intervalo...

$$(\bar{y} - Sy, \bar{y} + Sy)?$$

Intervalo estatura de las hijas → (162.46, 173.94)

Individuos → 6 hijas

Porcentaje → $6/10 = 0.60 \rightarrow 60\%$

(c) Interpreta, analiza y **compara** los resultados obtenidos acerca de la estatura de las hijas y la estatura de las madres en los siguientes sumatorios y parámetros:

$n, \Sigma x, \bar{x}$, intervalo $(\bar{x} - Sx, \bar{x} + Sx)$, $\Sigma y, \bar{y}$, intervalo $(\bar{y} - Sy, \bar{y} + Sy)$.

- ☞ Se han estudiado 10 chicas y sus respectivas madres (n).
- ☞ Si sumamos las alturas de todas las hijas obtenemos 1682 cm (Σy), mientras que la suma de las estaturas de las madres es ligeramente inferior, 1643 cm (Σx).
- ☞ La media de las alturas de las hijas es superior ($\bar{y} = 168.2$ cm) a la de las madres ($\bar{x} = 164.3$ cm)
- ☞ El 60 % de las hijas tienen una altura comprendida entre 162.5 y 174 cm, y en las madres, también el 60%, están en el intervalo 158.3 y 170.3 cm.

(d) ¿Cómo se denomina la varianza conjunta de las variables "x" e "y"? . Calcula el valor de dicho parámetro e interpreta su significado.

Al parámetro se le llama COVARIANZA (S_{xy})

<div style="display: flex; align-items: center;"> $S_{xy} = \frac{\sum \sum x_i \cdot y_i \cdot f_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y}$ </div> <p style="text-align: center; margin-top: 10px;">$S_{xy} = 23.84$</p> <p style="text-align: center;">$(S_{xy} > 0)$</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; background-color: #e0f0ff;"> $276591 \div 10 - 164.3 \times 168.2$ 23.84 </div>
---	---

En el estudio conjunto de dos variables, lo que nos interesa principalmente es saber si existe algún tipo de relación entre ellas. La covarianza es una medida descriptiva que sirve para medir o cuantificar esta relación. El inconveniente de la covarianza, como medida de asociación, es su dependencia de las unidades. Habrá que definir una nueva medida, que no está afectada por los cambios en las unidades de medida. Esta medida será el coeficiente de correlación lineal "r", que veremos más adelante.

La covarianza (**$S_{xy} > 0$**) nos indica que la relación va a ser directa, es decir, cuando aumenta la estatura de las madres, aumenta la estatura de las hijas.

(e) Dibuja la nube de puntos correspondiente y comenta de forma intuitiva, a la vista de la misma, la relación que se estima hay entre ambas variables.

Otra de las ventajas de la calculadora gráfica es que nos permite representar con total sencillez el **DIAGRAMA DE DISPERSIÓN O NUBE DE PUNTOS**, para poder analizarlo rápidamente.

EXIT EXIT GRPH SET F1 F6	<pre>StatGraph1 Graph Type :Scatter XList :List1 YList :List2 Frequency :1 Mark Type : Graph Color:Orange Blue Orn3 Grn</pre>
-------------------------------------	--

Así seleccionamos la forma de la gráfica, que podría ser la **GPH1** que aparece al margen

No hay que olvidar que hay que trabajar en **MANUAL** para introducirle el valor de los parámetros de visualización de pantalla que queramos:

EXE SHIFT SETUP Man V-Window F2 F3	<pre>View Window Xmin :120 max :184 scale:2 Ymin :120 max :184 scale:2 INIT TRIG STD STD RCL</pre>
---	---

La escala adecuada para una correcta visualización de esta gráfica podría ser la señalada =>

Recuerda que este tipo de gráfica lo tenemos diseñado en **GPH1**.

GRPH GPH1 EXE F1 F1	
------------------------------	--

Podría ser la que se indica adjunta

PREVISIÓN: la relación es lineal, directa, positiva, no muy fuerte.

(f) **Cuantifica, de forma matemática y precisa, la relación existente entre ambas variables. Justifica matemáticamente la respuesta.**

Lo estudiaremos con la ayuda del coeficiente de correlación lineal de Pearson (r):

$$(1) r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{23.84}{5.967411499 \cdot 5.741080038} = 0.6958676749$$

CONFIRMADO: La relación es lineal, directa, positiva, no muy fuerte

X F1	<pre>LinearReg a =0.66947486 b =58.2052794 r =0.69586767 r^2=0.48423182 y=ax+b COPY DRAW</pre>
---------	---

CON LA CALCULADORA CIENTÍFICA, GAMA MS

Una vez introducidos los datos, normalmente estas operaciones no se hacen introduciendo los números, siempre que se pueda, sino las teclas correspondientes, de la siguiente manera:

2 3 • 8 4 ÷ (SHIFT S-VAR 2 2 SHIFT S-VAR 2 ► 2) =	<pre>REG D 23.84÷(xσn yσn) 0.6958676749</pre>
--	---

(2) Utilizando la tecla específica que tienen las calculadoras con capacidad de análisis bidimensional:

SHIFT S-VAR ► ► 2 = 3 =	<pre>r 0.6958676749</pre>
---------------------------------------	---------------------------

(g) Calcula la ecuación de la recta de regresión de "y" sobre "x". Justifica matemáticamente la respuesta.

$$y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2} (x - \bar{x})$$

$$y - 168.2 = \frac{23.84}{5.967411499^2} \cdot (x - 164.3)$$

$$y - 168.2 = 0.6694748666 \cdot (x - 164.3)$$

$$y - 168.2 = 0.6694748666x - 109.9947206$$

$$y = 0.6694748666x - 109.9947206 + 168.2$$

$$y = 0.6694748666x + 58.2052794$$

En la pantalla anterior de la calculadora gráfica hemos obtenido los valores teóricos de los parámetros "a" y "b" de la expresión $y = ax + b$

$$y = 0.66947486x + 58.205279$$

Si lo que queremos es guardar la ecuación de la recta de regresión como función, para utilizarla en cualquier momento o realizar algún estudio, sólo habría que presionar:

COPY <input type="button" value="F5"/> <input type="button" value="EXE"/>	Graph Func Y1: 0.66947486x+58.20 Y2: Y3: Y4: Y5: Y6: To Store : [EXE]
--	--

CON LA CALCULADORA CIENTÍFICA, GAMA MS

(2) Con las teclas específicas que tienen las calculadoras con capacidad de análisis bidimensional. Se trata de la recta $y = Bx + A$ donde B y A son valores que obtenemos directamente con la calculadora.

S-VAR <input type="button" value="SHIFT"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="▶"/> <input type="button" value="▶"/> <input type="button" value="1"/> <input type="button" value="="/>	A 58.20527942
S-VAR <input type="button" value="SHIFT"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="▶"/> <input type="button" value="▶"/> <input type="button" value="2"/> <input type="button" value="="/>	B 0.669474866

$$y = 0.6694748666x + 58.2052794$$

(h) Dibuja la recta de regresión de "y" sobre "x"

DRAW <input type="button" value="F6"/>	
---	--

La opción **DRAW** dibujará la recta de regresión de "y" sobre "x"

(i) Si una mujer que mide 1.63 m tiene una hija, ¿cuánto se espera que mida ésta?. Justifica matemáticamente la respuesta.

NOTA: al estar "r" relativamente cercano a 1, los valores que obtengamos serán "relativamente" fiables y estarán próximos al valor estimado.

$x = 163 \text{ cm}$ → Habrá que utilizar la recta de regresión de "y" sobre "x", calculada anteriormente.

$$y = 0.6694748666 \cdot x + 58.2052794$$

$$y = 0.6694748666 \cdot 163 + 58.2052794$$

$$y = 167.3296827$$

Se espera que la estatura de la hija sea de aproximadamente 167.33 cm.

<p>Estos cálculos han de realizarse desde la opción MENÚ / RUN</p> <p style="text-align: center;">STAT \hat{y}</p> <p style="text-align: center;"> MENU 1 OPTN F5 1 6 3 F2 EXE </p>	<p>163</p> <p>167.3296827</p>
---	-------------------------------

CON LA CALCULADORA CIENTÍFICA, GAMA MS

(2) Con la opción directa que tiene la calculadora:

<p> 1 6 3 SHIFT S-VAR 2 ▶ ▶ ▶ 2 = </p>	<p>REG D</p> <p>163 \hat{y}</p> <p>167.3296827</p>
--	---

(j) Comenta la fiabilidad de las predicciones.

La recta de regresión explicaría el 69.59 de los casos ($r = 0.6959$)

(k) Calcula la ecuación de la recta de regresión de "x" sobre "y". Dibújala.

$$x - \bar{x} = \frac{S_{xy}}{S_y^2} (y - \bar{y})$$

$$x - 164.3 = \frac{23.84}{5.741080038^2} \cdot (y - 168.2)$$

$$x - 164.3 = 0.7233009708 \cdot (y - 168.2)$$

$$x - 164.3 = 0.7233009708y - 121.6592233$$

$$x = 0.7233009708y - 121.6592233 + 164.3$$

$$x = 0.7233009708y + 42.64077671$$

Recuerda: En este caso no se podría utilizar la calculadora científica de forma directa ya que la recta $y = Bx + A$ NO minimiza el error de la variable "x". Se podría utilizar el "truco" de introducir de nuevo los pares de datos: En primer lugar la "y", luego la "x".

Estatura de madres	163	155	160	161	164	158	175	169	166	172
Estatura de hijas	158	162	164	165	168	169	172	172	174	178

Si hemos introducido los datos de nuevo, como se nos ha indicado anteriormente, confirmaremos resultados (en la calculadora gráfica simplemente se intercambian las variables):

CON LA CALCULADORA CIENTÍFICA, GAMA MS

A 42.64077671	B 0.7233009708
------------------	-------------------

(I) Si una chica mide 1.70 m, ¿cuánto se espera que mida la madre?. Justifica matemáticamente la respuesta.

NOTA: al estar "r" cercano a 1, los valores que obtengamos serán fiables y estarán próximos al valor estimado.

$y = 170 \text{ cm} \rightarrow$ utilizamos la recta de regresión de "x" sobre "y".

$$x = 0.7233009708y + 42.64077671$$

$$x = 0.7233009708 \cdot 170 + 42.64077671$$

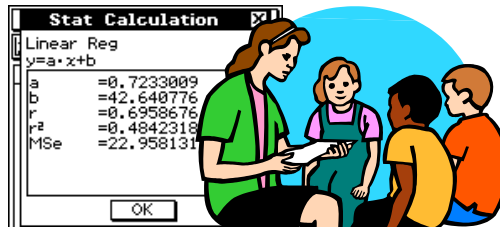
$$x = 165.6019427 \text{ cm}$$

Se espera que la estatura de la madre se aproxime a 165.60 cm

Estos cálculos han de realizarse desde la opción MENÚ / RUN STAT \hat{y} MENU 1 OPTN F5 1 7 0 F2 EXE	170 165.6019417
---	--------------------

CON LA CALCULADORA CIENTÍFICA, GAMA MS

1 7 0 SHIFT S-VAR 2 > > > 2 =	REG D 170 \hat{y} 165.6019427
-------------------------------	---------------------------------------



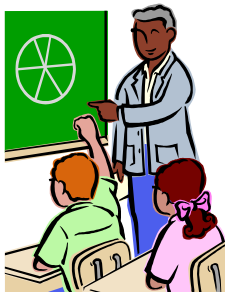
Una vez finalizada la presentación teórica del tema y alguna actividad básica, propondremos un cuestionario de preguntas, de contestación corta, con el objetivo de **CONSOLIDAR** y comprobar el grado de comprensión de los conceptos. La respuesta será individual, trabajada en casa y registrada en el cuaderno, para una posterior puesta en común y discusión en clase, actuando el profesor como moderador, buscando siempre el debate y la reflexión.

CUESTIONARIO DE PREGUNTAS. AUTOEVALUACIÓN.

Contesta brevemente a las siguientes cuestiones de forma razonada:

01	¿Qué quiere decir que la correlación es lineal? ¿Y curvilínea?.
02	Explica qué significa que la correlación lineal entre dos variables sea positiva. Pon un ejemplo.
03	¿Cuándo se dice que la correlación lineal entre dos variables es negativa?. Pon un ejemplo.

04	Propón y dibuja una posible nube de puntos de una distribución sabiendo que su correlación es lineal, positiva y muy fuerte.
05	¿Existe algún punto por el que siempre pase la recta de regresión?
06	¿Qué quiere decir que la correlación lineal entre dos variables es muy débil?. Pon un ejemplo.
07	Escribe la expresión matemática del coeficiente de correlación lineal de Pearson.
08	¿Tiene sentido calcular la recta de regresión de una distribución bidimensional sabiendo que el coeficiente de correlación es $r = 0.12$?
09	¿Qué valores puede tomar el coeficiente de correlación lineal?
10	¿Cuál es el significado del signo de la covarianza?
11	Si conoces el signo de la covarianza, ¿puedes afirmar algo sobre la correlación?
12	¿Qué valor toma "r" cuando la covarianza es nula?
13	¿Cuándo se dice que dos variables están en dependencia funcional?. Pon un ejemplo.
14	Decir que dos variables están incorreladas, ¿es lo mismo que decir que son estadísticamente independientes?
15	¿Cuándo se dice que dos variables no son estadísticamente independientes?
16	Dada una nube de puntos, ¿existe algún método que permita obtener <i>aproximadamente</i> el valor de "r" sin necesidad de realizar ningún cálculo?
17	La correlación sólo es válida para valores próximos a los datos. ¿Porqué?
18	¿Para qué sirve la recta de regresión en una distribución bidimensional?
19	¿Antes de calcular la recta de regresión, es conveniente obtener el coeficiente de correlación lineal?. Razona la respuesta.
20	Si el valor absoluto del coeficiente de correlación lineal es muy próximo a la unidad, ¿podemos estar seguros de que las previsiones que realicemos serán fiables?
21	Al extrapolar fuera del recorrido de la distribución, ¿se corre peligro de obtener resultados erróneos?
22	¿Conoces algún tipo de relación funcional de tipo no lineal?. En caso afirmativo, enumera alguno.



Una vez acabada esta primera fase trabajaremos el tema mediante **tres tipos de actividades** a realizar en clase y en la prueba objetiva escrita:

- ACTIVIDADES tipo A, en las que el alumno puede utilizar la calculadora como herramienta auxiliar para realizar operaciones y comprobar resultados, justificando matemáticamente, en todo momento, lo que hace.

- ACTIVIDADES tipo B, en las que la calculadora cobra total protagonismo, con preguntas diseñadas para que, después de introducir los datos en la máquina, el alumno se centre en las respuestas, en la reflexión y donde el objetivo fundamental es la APLICACIÓN de los resultados a las situaciones propuestas.

- ACTIVIDADES INDAGATORIAS tipo TEST, con una respuesta a elegir de entre varias.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES TIPO A

Una compañía desea hacer predicciones del valor anual de sus ventas totales en cierto país a partir de la relación entre éstas y la renta nacional. Para investigar la relación cuenta con los siguientes datos:

X	160	181	196	241	265	285	298	316	337
Y	410	415	423	452	463	479	460	450	501

donde X representa la renta nacional en millones de dólares e Y representa las ventas de la compañía en miles de dólares en el período desde 1980 hasta 1988 (ambos inclusive).



(a) ¿Cuántos países de la muestra, y qué porcentaje, tienen su renta nacional en el intervalo $(\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x)$?

(b) Interpreta y analiza los resultados obtenidos en la media \bar{x} y en el intervalo $(\bar{x} - S_x, \bar{x} + S_x)$.

(c) Calcula el valor de la covarianza e interpreta el resultado.

(d) Dibuja la nube de puntos correspondiente y comenta de forma intuitiva, a la vista de la misma, la relación que se estima hay entre ambas variables.

(e) Cuantifica, de forma precisa, la relación existente entre la renta nacional, en millones de dólares, y las ventas de la compañía, en miles de dólares. JUSTIFICA matemáticamente los resultados e interprétalos.

(f) En 1989 se espera que la renta nacional del país sea 325 000 000 de dólares. ¿Cuál será la predicción para las ventas de la compañía en este año?. Justifica matemáticamente los resultados.

(g) Comenta la fiabilidad de las predicciones.

(h) Dibuja la recta de regresión lineal que has obtenido.

(i) Si un país tiene una renta de 622 000 000 de \$, ¿cuál será la predicción para las ventas de la compañía en ese año?. Justifica matemáticamente los resultados.

(j) Si en país dicha compañía alcanza un volumen de ventas de 489 000 \$, ¿qué renta nacional estimas que tendrá?. Justifícalo matemáticamente

PROPUESTA DE ACTIVIDADES TIPO B

Contesta a las siguientes cuestiones, DE FORMA RAZONADA, utilizando como herramienta auxiliar una calculadora.

ACTIVIDAD 1

Se hace un estudio en un grupo de coches, donde se mide la velocidad máxima (en Km/h) que alcanzan y la cilindrada (en cm^3) que tienen, obteniéndose, los siguientes resultados:

Velocidad	125	130	140	145	150	170	190	195
cilindrada	1000	1200	1400	1600	1600	1800	2000	2000

(a) ¿Cuál crees que será la variable estadística dependiente y la v.e. independiente?.

(b) ¿Existe relación lineal entre ambas variables?.

(c) En caso afirmativo, comenta las características de esta relación.

(d) Un coche tiene una cilindrada de 5000 cm^3 . ¿Cuál crees que será la velocidad máxima que alcanza?



(e) Un coche tiene una cilindrada de 1500 cm^3 , ¿cuál estimas que será la velocidad máxima que alcanza?

(f) ¿Cuál es el grado de fiabilidad de esta predicción?

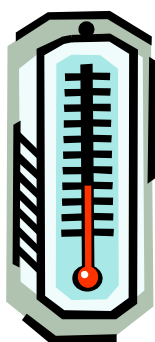
(g) ¿Serías capaz de encontrar una fórmula que relacionase ambas variables?. ¿Cuál es?

(h) ¿Y si te dicen que el coche alcanza una velocidad de 160 Km/h , ¿qué cilindrada esperas que tenga?. Busca la solución con el mínimo error.

ACTIVIDAD 2

Observamos la presión atmosférica (en mm Hg) y la temperatura media de los correspondientes días (expresadas en $^{\circ}\text{C}$), obteniéndose los siguientes resultados:

temperatura	18	19	20	18	22	21
Presión	789	800	805	785	820	820



(a) ¿Cuál crees que será la variable estadística dependiente y la v.e. independiente?

(b) ¿Existe relación lineal entre ambas variables?

(c) En caso afirmativo, comenta las características de esta relación.

(d) Un día que tenemos 21.5°C , ¿qué presión atmosférica se espera?

(e) Un día que tenemos 32°C , ¿qué presión atmosférica se espera?

(f) ¿Cuál es el grado de fiabilidad de estas predicciones?

(g) ¿Serías capaz de encontrar una fórmula que relacionase ambas variables?. ¿Cuál es?

(h) ¿Y si te dicen que la presión atmosférica, en un momento determinado, es de 810 mm Hg , ¿qué temperatura esperas que haya?. Busca la solución con el mínimo error.

PROPUESTAS DE ACTIVIDADES INDAGATORIAS TIPO TEST

01.- En un ajuste lineal, si el coeficiente de correlación lineal vale -1 , entonces:

- Las dos rectas de regresión coinciden.
- Las dos rectas de regresión son paralelas.
- Las dos rectas de regresión son perpendiculares.
- Ninguna de las anteriores.

02.- El diagrama de dispersión o nube de puntos es la representación de:

- Las frecuencias absolutas de dos variables.
- Una tabla de contingencia.
- Los valores de dos variables cualitativas.
- Los valores de dos variables cuantitativas continuas.
- Las frecuencias relativas de dos variables cuantitativas.

03.- Sean X e Y dos variables aleatorias que no sean independientes. Entonces:

- La varianza de la suma es la suma de las varianzas
- La varianza de la suma es menor que la suma de las varianzas.
- La varianza de la suma es mayor que la suma de las varianzas.
- La varianza de la suma unas veces es mayor y otras veces es menor.

04.- La covarianza entre dos variables X e Y

- Es adimensional.
- Depende de la escala de medida.
- Vale cero si las variables son independientes.
- Siempre toma valores en el intervalo $[-1, 1]$.

05.- Disponemos de un conjunto de pares de datos correspondientes a dos variables X e Y independientes. Entonces:

- Las dos rectas de regresión coinciden.
- Las dos rectas de regresión son paralelas.
- Las dos rectas de regresión son perpendiculares.
- Ninguna de las anteriores.

06.- El coeficiente de correlación lineal de Pearson entre X e Y

- Tiene el mismo signo que la covarianza
- Mide el grado de asociación entre las variables
- Si vale cero, las variables son independientes
- Vale cero si las variables son independientes

07.- La relación que existe entre las dos variables de una distribución bidimensional se llama:

- Covarianza
- Regresión
- Desviación típica
- Correlación.

08.- Si el coeficiente de correlación lineal de Pearson vale $r = - 0,89$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta??

- X e Y son estadísticamente independientes
- X e Y están en dependencia estadística débil.
- X e Y están en dependencia estadística fuerte.
- X e Y están en dependencia funcional.

09.- ¿Cuál de los siguientes valores no puede tomar el coeficiente de correlación lineal de Pearson?

- 1
- 0
- 1/2
- 3/2

10.- Si la media de la variable X es 1, y la de la variable Y es 2, ¿qué es $(1, 2)$?

- La media
- La covarianza
- La desviación típica
- El centro de gravedad de la distribución bidimensional.

Al final, la prueba objetiva escrita intentaría aglutinar todas las actividades, cuestiones y objetivos trabajados a lo largo del tema, según ya hemos señalado.

Aunque la investigación de la didáctica de la ESTADÍSTICA con las nuevas tecnologías está dando sus primeros pasos, somos muchos los que estamos trabajando en el tema, con múltiples y variados enfoques. Concretamente, en nuestro centro, en el IES Pérez de Ayala de Oviedo (Asturias), estamos llevando a cabo un PROYECTO donde se incluye en el aula la nueva tecnología ClassPad de CASIO, con una herramienta educativa y matemática de última generación, que cuenta con un gran número de prestaciones y ventajas; sus

calidades la hacen un híbrido entre calculadora gráfica–algebraica, ordenador de bolsillo y PDA con lápiz táctil interactivo. En cada sesión, cada alumno dispone de una calculadora de mano y una retroproyetable para el profesor, que permite llegar a todos fácilmente, generando una visualización general, que llega de forma instantánea a todos los alumnos, conviviendo de forma paralela y simultánea con una enseñanza más "tradicional".

Todo lo mencionado lo estamos trabajando en algunos grupos de diferentes niveles de ESO y Bachillerato, sin necesidad de salir del aula, con un simple retroproyector, con el objetivo de comprobar sus posibilidades didácticas, como elemento motivador, de refuerzo visual y conceptual de todo aquello que vamos trabajando día a día.

NOTA: también cabe destacar que cada alumno dispone de un CD Rom que le permite la instalación de un emulador en su ordenador personal, pudiendo trabajar con la máquina en casa de un forma cómoda y sencilla, donde el ratón pasa a ser el lápiz táctil de la calculadora de mano.



Visítanos en www.aulamatemática.tk

Para cualquier duda, intercambio de opiniones, materiales, sugerencias, petición de materiales... no dudéis en poneros en contacto con nosotros:

abelj@telecable.es

rosanaag@telecable.es

Hasta pronto amigos; en el próximo número podremos reflexionar acerca del tema:

Enseñando la distribución Binomial en Bachillerato con la ayuda de una calculadora