

Dr. Ludwig Paditz
Catedrático de Ciencias

MODELOS MATEMÁTICOS Y APLICACIONES CIENTÍFICO-TÉCNICAS

Ejemplos escolares y universitarios con la calculadora gráfica y simbólica Classpad 300

Título de la obra original:
**MATHEMATISCHE MODELLE
UND WISSENSCHAFTLICH-
TECHNISCHE ANWENDUNGEN**

**Beispiele aus Schule und Studium mit dem grafikfähigen
Symbol-Taschenrechner ClassPad 300**

Autor:
Prof. Dr. Ludwig Paditz
Catedrático de Ciencias

Edición original en la lengua alemana publicada por:
Bildungsverlag E1NS

Traducido por:
Profesor Vicenç Cabedo Carretero
vcabedo@xtec.cat

Adaptación de la versión española:
Profesor Daniel Vila Martínez
dvila123@xtec.cat

© **División Didáctica Casio, 2007**
divisiondidactica@flamagas.com
Flamagas S.A.
Sales i Ferrer, 7
08041 Barcelona

MODELOS MATEMÁTICOS Y APLICACIONES CIENTÍFICO-TÉCNICAS

Ejemplos escolares y universitarios con la calculadora gráfica y simbólica
Classpad 300

Autor: Dr. Ludwig Paditz
Catedrático de Ciencias en la HTW Dresden
Licenciado en Matemáticas

CASIO Europe SL (Ed.)

© CASIO Europe SL, Norderstedt 2004.

1ª Edición 2004.

Todos los derechos reservados.

Página web: <http://www.casio-europe.com>

Texto e ilustraciones han sido elaborados con el máximo cuidado. No puede ser asumida ninguna responsabilidad por eventuales errores remanentes ni por sus consecuencias.

CASIO es marca registrada

Introducción

La clase de matemática moderna en la escuela o en la Universidad es hoy en día inconcebible sin la presencia de medios electrónicos de cálculo.

Aunque a menudo se trata de los contenidos académicos clásicos con los que ya las antiguas generaciones de alumnos escolares y universitarios debieron lidiar, la representación y adquisición de conocimientos sobre aquellos temas matemáticos se encuentran sujetos a un cambio y participan de las necesidades de nuestro tiempo:

Se pide resolver tareas más exigentes, las cuales no son ya realizables sólo con papel y lápiz.

La calculadora gráfica de bolsillo ClassPad 300 ha tenido en el último año¹ una difusión creciente en el ámbito escolar y su uso está permitido, en tanto que aparato electrónico de cálculo moderno, en los exámenes. Los estudiantes de hoy en día conocen la regla de cálculo sólo a través de las explicaciones de sus padres.

Con el presente libro se pretende una aproximación al anteriormente formulado nivel de exigencia en una clase moderna de matemáticas sugiriendo tareas de clase con el objetivo de introducir la ClassPad 300.

El libro está dirigido ante todo a los profesores y profesoras de matemáticas, que podrán encontrar en cada uno de los ejercicios sugerencias metodológicas sobre cómo las antiguas tareas de papel y lápiz pueden ser ampliadas a tareas de calculadora sin por ello descuidar el efecto sorpresa. Antes al contrario, mediante el uso de la calculadora gráfica de bolsillo se pueden transmitir mejor determinados contenidos matemáticos, de manera que algunos alumnos, a los que hasta el momento las matemáticas les resultaba una asignatura difícil, verán nacer en ellos un entusiasmo inédito por esta materia.

Naturalmente, el presente libro se dirige también a aquellos estudiosos de las matemáticas e interesados que deseen encontrar nuevos estímulos a través del uso de la ClassPad 300 o modelos similares de calculadoras de bolsillo.

Son precisos conocimientos básicos previos sobre el manejo de la ClassPad 300 o de un modelo similar de calculadora de bolsillo.

El lector encontrará en los 15 capítulos del libro, los cuales pueden leerse independientemente uno de otro, ejercicios de clase comprobados sobre diversos temas matemáticos, correspondientes a las programaciones de los Ciclos Formativos o del Bachillerato. Algunas aplicaciones alcanzan el nivel de Escuela Técnica Superior, resultando especialmente interesantes a los alumnos de primeros cursos universitarios.

La clasificación de contenidos en los 5 primeros capítulos comprende temas de Álgebra y comienza con el análisis de sistemas de ecuaciones lineales, que pueden tener una, varias o ninguna solución. Aquí la Calculadora de bolsillo se convierte ya en una ayuda de gran utilidad si el sistema de ecuaciones contiene variables simbólicas (parámetros). A continuación vienen capítulos sobre el cálculo de vectores en $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^n$. El capítulo 5 presenta una introducción a los números complejos mediante la ClassPad 300.

En cada capítulo el lector encuentra valiosas “Pistas para iniciados”, que deberían permitir allanar algunos problemas aparentes o bien señalar las ventajas de la utilización de la calculadora y explicar la base matemática.

¹ 2003

Los capítulos que siguen, desde el 6 hasta el 8, se refieren a la representación gráfica en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ y tratan en particular la discusión de curvas. Aquí el lector interesado aprenderá algunas cosas nuevas sobre ventanas de observación en escala logarítmica, configurables con la ClassPad 300 por primera vez. Más adelante se explica a través de ejemplos sencillos cómo pueden generarse gráficos producidos al azar (Trayectorias de un suceso estocástico).

Los capítulos 9 y 10 se dedican al cálculo simbólico. Aquí encontrará el lector *Pistas para Iniciados* que van desde el cálculo integral o la descomposición de fracciones parciales hasta la utilización de nuevas instrucciones de la calculadora de bolsillo para sucesiones numéricas y secuencias de sumas parciales con carácter polinómico. Todo ello va mucho más allá de las sucesiones aritméticas o geométricas conocidas hasta ahora.

El capítulo 11 se inscribe en el moderno campo del cálculo de probabilidades y de la estadística matemática, los cuales están alcanzando una presencia cada vez mayor en los *currícula* de los cursos superiores. Aquí el lector aprende algunas técnicas sobre simulación y evaluación de datos, y los fundamentos de la teoría de la probabilidad. Por medio del juego de azar ‘Dos cabras y un coche’ será introducido de manera fácil y clara en la problemática. De paso también se explicará la programación de la calculadora de bolsillo.

Los últimos cuatro capítulos se ocupan de modelos matemáticos sencillos aplicados a la Tecnología, los cuales pueden ser descritos con ayuda de ecuaciones diferenciales o bien remitirse a las Series de Fourier. A través de ejemplos muy ilustrativos el lector va descubriendo el manejo de la ClassPad 300, pudiendo avanzar sorprendentemente.

El atractivo especial de este libro radica en ofrecer, como complemento de la clase de Matemáticas actual, la presentación de otros caminos hacia el conocimiento matemático. Aquél que no se da por satisfecho con la clase de Matemáticas convencional y desea profundizar en determinados temas de manera autónoma hallará aquí valiosos estímulos.

Texto e imágenes han sido realizados en base a la versión actual del producto 01.24.0000 de la ClassPad 300 con el máximo cuidado. Las sugerencias y propuestas que puedan surgir durante el trabajo con este libro serán siempre bienvenidas por la filial de Alemania de CASIO Europa SL, así como por el editor y el autor. No se asumirá ninguna responsabilidad legal por eventuales errores contenidos en el libro.

Este trabajo tiene todos los derechos reservados. Lo anterior atañe también a la traducción y la reproducción o la distribución mediante sistemas electrónicos, así como a la reproducción con propósitos educativos sin autorización escrita por parte de CASIO Europa SL.

Dresde, Mayo 2004
Dr. Ludwig Paditz, Catedrático de Ciencias
Dirección de contacto del autor:

Hochschule für Technik und Wirtschaft (FH)
FB Informatik/Mathematik
Friedrich-List-Platz 1
D-01069 Dresden

paditz@informatik.htw-dresden.de
<http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/>

Tabla de contenidos

Introducción	3
Tabla de contenidos	5
1 Solución de sistemas de ecuaciones lineales	7
1.1 Ejemplo introductorio a la notación elemental y de matrices.....	7
1.2 Ejemplo introductorio en la notación elemental y de vectores.....	8
1.3 Sistemas de ecuaciones equivalentes.....	9
1.4 Transformación del Sistema de Ecuaciones con el Algoritmo de Gauss.	10
1.5 Sistemas de ecuaciones cuasilineales	13
1.6 Apéndice al capítulo 1	18
2 Cálculo de vectores, bidimensional.....	22
2.1 Modo angular.....	22
2.2 Transformación de coordenadas en coordenadas polares.....	22
3 Cálculo de vectores, tridimensional.....	25
3.1 Modo de representación	25
3.2 Producto escalar y vectorial.....	26
4 Cálculo de vectores, n-dimensional	30
5 Números complejos	31
5.1 Modo de grados sexagesimales	32
5.2 Modo de radianes	32
5.3 Más notaciones de entrada y de salida para números complejos.....	32
5.4 La representación de módulo-argumento (representación exponencial, forma de Euler).	33
5.5 La representación Parte real - Parte imaginaria (notación de componentes).....	34
5.6 Cálculo con números complejos en modo de grados sexagesimales.....	35
6 Representación gráfica de funciones y gráficos estadísticos	36
(Gráfico 2D)	
6.1 Representación gráfica de funciones	36
6.2 El editor de funciones (Hojas de trabajo)	36
6.3 Partición de la pantalla de trabajo.....	38
6.4 Escalado logarítmico(logaritmo decimal)	39
6.5 Ejemplo práctico de aplicación de la regresión potencial y de la representación 2D en la ventana de visualización escalada logarítmicamente.....	40
6.6 Intersección entre dos gráficos	43
6.7 Curvas en representación paramétrica.	44
6.8 Curvas en representación de coordenadas polares.....	45
6.9 Funciones estocásticas (Trayectorias de un proceso aleatorio)	46
6.10 Representación de una superficie 2D con sombreado aleatorio	47
6.11 Representación de una señal periódica con “Tiempos de pausa”	47
7 Discusión de curvas para una función $y = f(x)$	48
7.1 Ceros.....	48
7.2 Extremos locales y puntos de inflexión.....	49
7.3 Resumen de la Discusión de curvas	53
8 Representación gráfica de funciones $z = f(x, y)$.....	54
(Gráfico 3D)	

9	Cálculo simbólico con términos de fórmulas	58
9.1	Descomposición parcial de fracciones.....	61
9.2	Solución de un sistema no lineal de ecuaciones.	62
9.3	Solución de un problema de optimización no lineal.....	63
10	Cálculo simbólico con sucesiones numéricas	65
10.1	Sucesiones de sumas parciales	66
10.2	La orden rSolve(...).....	67
11	Cálculo de probabilidad y Estadística	69
11.1	El problema de Monty Hall	69
11.2	La base matemática de la simulación	76
12	Aplicación práctica 1.....	77
12.1	Ejemplo numérico 1	77
12.2	Ejemplo numérico 2	78
12.3	Ejemplo numérico 3	79
12.4	Recomposición de una Ec. Dif. no homogénea a la correspondiente Ec. Dif. homogénea.....	80
12.5	Superposición de ondas, pulsaciones.....	81
13	Aplicación práctica 2.....	82
13.1	Ejemplo 1: Oscilación rectangular	82
13.2	Ejemplo 2: Oscilación en diente de sierra	83
13.3	Ejemplo 3: Oscilación en diente de sierra exponencial	84
13.4	Ejemplo 4: Sucesión de pulsos estroboscópicos.....	85
14	Aplicación práctica 3.....	87
14.1	Ejemplo 1: Oscilación en diente de sierra	87
14.2	Ejemplo 2: Oscilación en diente de sierra exponencial	88
14.3	Ejemplo 3: Sucesión de pulsos estroboscópicos.....	90
15	Otras aplicaciones en la tecnología de las noticias	91
15.1	Función de transmisión compleja	91
15.2	Transmisión de señales periódicas	94
	Sugerencias bibliográficas.....	99
16	Sugerencias de soluciones a los problemas de ampliación de los capítulos individuales.....	100
16.1	Capítulo 1	100
16.2	Capítulo 2	103
16.3	Capítulo 3	103
16.4	Capítulo 7	105
16.5	Capítulo 8	106
16.6	Capítulo 10	106
16.7	Capítulo 12	107
16.8	Capítulo 13	108
16.9	Capítulo 14	110
	Índice alfabético de palabras clave.....	111

1 Solución de sistemas de ecuaciones lineales

(con matriz de coeficientes regular o singular)

¿Cómo se encuentra con ayuda de las órdenes **ref(...)/rref(...)** la solución (no) exacta de un sistema de ecuaciones lineales?

1.1 Ejemplo introductorio a la notación elemental y de matrices

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + tz = 2 \end{array} \right\} \text{ i.e. } A \times \vec{w} - \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & t \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (\text{Vector cero})$$

La matriz **A** está limitada por corchetes ([]), y en el menú de la aplicación

principal (Principal: pulsar sobre  o ) es introducida por filas. Así los elementos de una línea se colocan igualmente entre corchetes y se introducen uno tras otro (separados por comas). La entrada

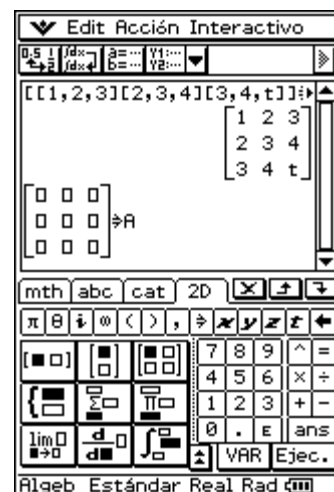
$[[1,2,3][2,3,4][3,4,t]] \Rightarrow A$ 

produce la visualización (display) adyacente:

Primero es registrada la **línea de entrada**; a continuación, la reacción de la calculadora: la **línea de respuesta** (“Answer”, variable de sistema **ans**).

Pista para iniciados

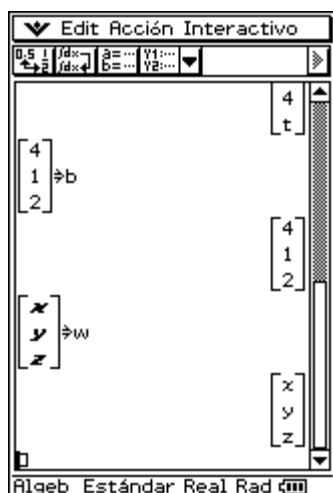
Utilice la cómoda entrada de matrices y vectores en el ClassPad con ayuda del teclado virtual. En el menú abierto de la aplicación principal (Principal) se abre el teclado virtual (presionar tecla ) y se pulsa **2D**. Después se pasa página con  y se pulsa dos veces sobre . En la ventana de entrada del menú de la aplicación principal se abre así el correspondiente campo de entrada-2D con marcadores de posición. ¡Pruebe usted! La instrucción de almacenamiento $\Rightarrow$ se encuentra inmediatamente bajo el símbolo **2D** en el teclado virtual (en el menú abierto **2D** así como en el menú **nth**)



1.2 Ejemplo introductorio en la notación elemental y de vectores.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + tz = 2 \end{array} \right\} \text{ i.e. } x \times \vec{a1} + y \times \vec{a2} + z \times \vec{a3} - 1 \times \vec{b} = \vec{0}$$

$$\text{Significan } \vec{a1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{a2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{a3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ t \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ así como } \vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

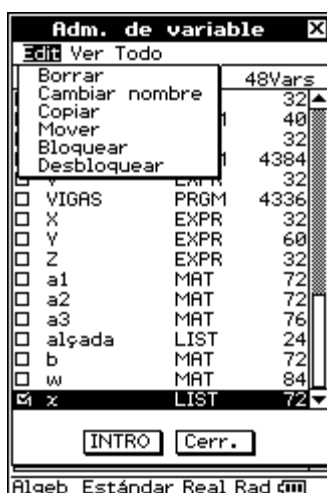
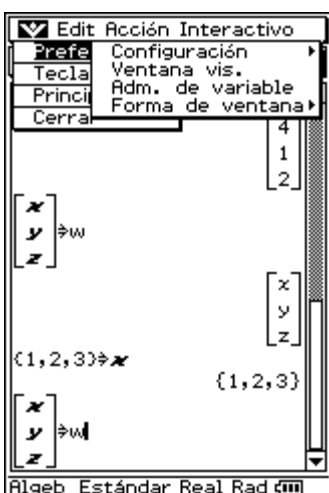


De nuevo se usa la cómoda entrada de matrices y vectores en la Classpad 300 con ayuda del teclado virtual. En el menú abierto de la aplicación principal (Principal) se abre el teclado virtual (tecla **Keyboard**) y se pulsa **2D**. Después se pasa página con **▼** y se pulsa **□** dos veces. En la ventana de entrada del menú de la aplicación principal se abre así el correspondiente campo de entrada-2D con símbolos de sustitución. En la imagen adyacente ha tenido lugar ya la entrada.

Pista para iniciados

En caso de que durante la utilización (almacenamiento) de variables simbólicas se produzcan como resultado mensajes de error o líneas de respuesta incorrectas, se tratará, por lo general, de una variable simbólica que ya está siendo utilizada, a la que se ha asignado un valor. En ese caso debería abrirse el Administrador de Variables y buscarse en el archivo actual entradas ya existentes. Ahí puede borrarse una variable en caso de que contenga un valor más antiguo. Una variable que en el archivo actual no tiene ninguna asignación no ha recibido, por consiguiente, ninguna entrada de valores y puede ser utilizada para nuevos valores simbólicos.

Para acceder al Administrador de Variables hay que situarse sobre el icono , arriba a la izquierda de la pantalla, y pulsar sobre Preferencias. La carpeta actual para el almacenamiento de de variables definidas es configurada al principio de un cálculo a través del Adm. de Variables, o bien a través del menú "Formato básico", en el cual igualmente hay que situarse sobre el icono , arriba a la izquierda, y entonces pulsar sobre Preferencias, Configuración.



El vector simbólico $\vec{w}$ no puede ser creado ya que la primera variable de $\vec{w}$ ya ha sido asignada como variable de LISTA. Por lo tanto x debe ser borrada.

En notación vectorial, el sistema lineal de ecuaciones, que adquiere la forma

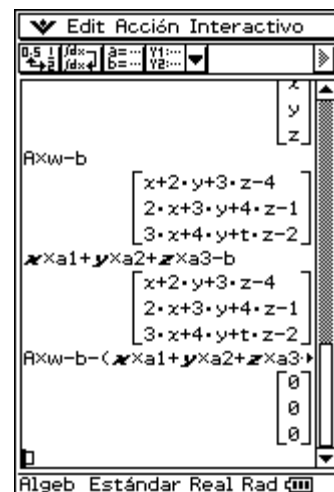
$$x \times \vec{a1} + y \times \vec{a2} + z \times \vec{a3} = \vec{b}, \text{ es decir } x \times \vec{a1} + y \times \vec{a2} + z \times \vec{a3} - 1 \times \vec{b} = \vec{0}$$

implica una combinación lineal de vectores, en el último caso una combinación lineal (no trivial) del vector cero.

En todas las representaciones, t es un coeficiente desconocido (es decir un parámetro del sistema de ecuaciones).

Construimos ahora los términos $\vec{A} \times \vec{w} - \vec{b}$ o $x \times \vec{a1} + y \times \vec{a2} + z \times \vec{a3} - \vec{b}$ para convencernos de la igualdad, o, para ser precisos, de la diferencia de ambos términos para conservar el vector cero.

Así hemos probado la igualdad de las distintas notaciones.



1.3 Sistemas de ecuaciones equivalentes.

Los sistemas de ecuaciones equivalentes se originan a través de transformaciones elementales, tal como la multiplicación de una ecuación por un número, por ejemplo:

$$(x + 2y + 3z = 4) \cdot 2 \text{ da } 2x + 4y + 6z = 8,$$

o la suma de una ecuación multiplicada (por un escalar) a otra ecuación (por ejemplo, el doble de la primera ecuación sustraerlo posteriormente de la segunda ecuación y utilizar el resultado como nueva segunda ecuación):

$$(2x + 3y + 4z = 1) - 2 \times (x + 2y + 3z = 4) \text{ da } 0x - 1y - 2z = -7.$$

En lugar de multiplicación aquí hay también división (¡¡¡ divisor diferente de cero!!!) y en lugar de adición también se admite sustracción. Los sistemas de ecuaciones equivalentes poseen el mismo comportamiento de soluciones (véase la casilla situada más adelante con 1ª, 2ª y 3ª) y (en caso de que sea resoluble) las mismas soluciones.

Este método es utilizado, por ejemplo, en el Algoritmo de Gauss, el cual finaliza con un sistema de ecuaciones equivalente en forma escalonada, como muestran las siguientes transformaciones (con $t = 1$) (véanse los campos numéricos groseramente delimitados de la página siguiente).

Hay tres posibilidades de comportamiento de soluciones del sistema de ecuaciones:

1ª El sistema de ecuaciones **tiene solución única** si y sólo si hay números x, y, z

de manera única, es decir un vector solución $\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, de manera que el

sistema de ecuaciones resulta satisfecho. **Sistema Compatible Determinado.**

2ª El sistema de ecuaciones es **irresoluble** si y sólo si contiene una contradicción, es decir, si no hay ningún vector $\vec{w}$ con números adecuados x, y, z . **Sistema Incompatible.**

3ª El sistema de ecuaciones **tiene solución múltiple** si y sólo si hay infinitos vectores. **Sistema Compatible Indeterminado.**

1.4 Transformación del Sistema de Ecuaciones con el Algoritmo de Gauss.

Los elementos de la matriz A y de la columna $\vec{b}$ son combinados en la matriz ampliada $[A, \vec{b}]$ con tres filas y cuatro columnas usándose la orden **augment(...)**:

augment([1, 2, 3] [2, 3, 4] [3, 4, 1]), trn([4, 1, 2])) $\Rightarrow$ B 

La matriz ampliada $[A, \vec{b}]$ puede, con ayuda de las órdenes **ref(...)** o bien **rref(...)**, ser transformada en la **forma escalonada reducida por filas** (row reduced echelon form). Cada una de estas matrices ampliadas no es otra cosa que la representación tabular de algún sistema de ecuaciones equivalente.

Para los no iniciados en este método, a continuación viene una aclaración, perfectamente comprensible, de los pasos de transformación desencadenados por estas órdenes a la luz de nuestro ejemplo con $t = 1$ (quien lo desee puede comprobar mentalmente todo sin calculadora).

3	4	1	2
2	3	4	1
1	2	3	4
1	4/3	1/3	2/3
1	3/2	4/2	1/2
1	2	3	4
1	4/3	1/3	2/3
0	1/6	5/3	-1/6
0	2/3	8/3	10/3
1	4/3	1/3	2/3
0	2/3	8/3	10/3
0	1/6	5/3	-1/6
1	4/3	1/3	2/3
0	1	4	5
0	1	10	-1
1	4/3	1/3	2/3
0	1	4	5
0	0	6	-6
1	4/3	1/3	2/3
0	1	4	5
0	0	1	-1
$x + 4/3 \cdot y + 1/3 \cdot z = 2/3$			
$y + 4z = 5$			
$z = -1$			
$\Rightarrow z = -1, y = 9, x = -11$			

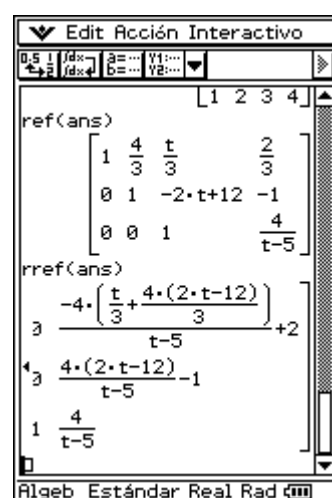
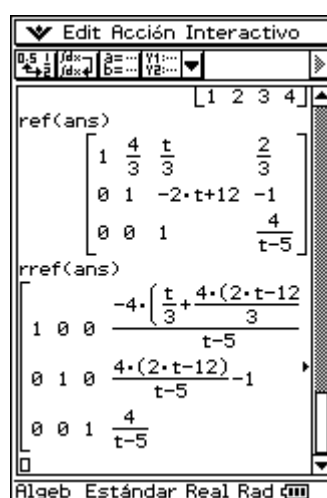
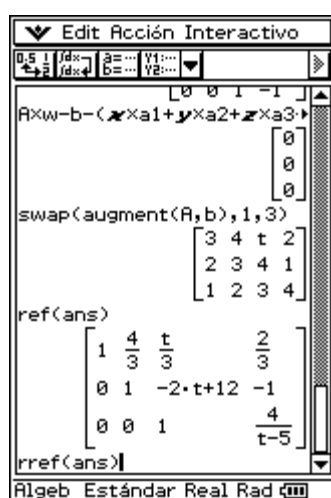
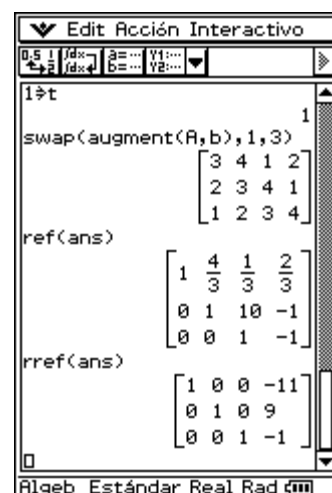
1. Las filas son reordenadas según los valores absolutos de a_{i1} , de manera que el mayor valor absoluto ocupa la posición a_{11} (permutación de pivote). (Las filas que empiezan por 0 aparecen al final).
2. Los elementos de la línea i son divididos entre a_{i1} (siempre y cuando $a_{i1} \neq 0$, de manera que en la primera columna sólo queden unos (las filas que empiezan por 0 aparecen al final).
3. De todos los elementos de las filas **2** hasta **n** se substraen el elemento de la línea **1** que allí se encuentre, de manera que en las posiciones **2** hasta **n** de la primera columna haya ceros.
4. Las filas **2** hasta **n** son ordenadas ahora según las cantidades del elemento actual a_{i2} .
5. Los elementos de esas filas se dividen ahora entre a_{i2} (siempre y cuando sea $a_{i2} \neq 0$), de manera que en las posiciones a_{i2} ($i = 2$ hasta n) de la segunda columna sólo haya unos (siempre y cuando $a_{i2} \neq 0$).
6. Para las filas que aún resten (en este caso una) se seguirá con éste método los correspondientes pasos 3., 4. y 5. hasta que en todas las posiciones de las diagonales principales de la matriz A sólo haya unos, y a izquierda sólo ceros.
7. A esta forma de $[A, \vec{b}]$ se le llama “forma escalonada por filas”. Se la conoce como el “sistema de ecuaciones escalonado” -de acuerdo con el sistema de salida- que puede ser resuelto con facilidad mediante “desenrollado” (cálculo inverso).
8. La “forma escalonada por filas” es escrita ahora de nuevo como sistema de ecuaciones escalonado (equivalente) y se resuelve sustituyendo hacia atrás.

Con la orden **ref(...)** se puede construir directamente esta forma escalonada, mientras que la orden **swap(...)** intercambia la primera y la tercera línea. El resultado mostrado no corresponde exactamente (2ª línea) al cálculo manual, ya que éste no sigue necesariamente la programación del software. La matriz ampliada mostrada, sin embargo, representa igualmente un sistema de ecuaciones equivalente.

En la forma escalonada reducida **rref(...)** se ejecuta también el “desenrollado” (el “cálculo inverso”):

A continuación, en lugar de la matriz original **A**, aparece la matriz unitaria (matriz identidad) **I**, y ahora el vector solución $\vec{w}$ garantiza los elementos de $\vec{b}$.

En las siguientes imágenes fue resuelto el caso para $t = 1$ en el Administrador de variables, con lo cual se consigue una solución dependiente de t ($t \neq 5$):



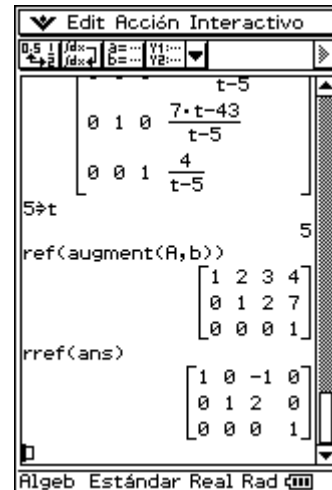
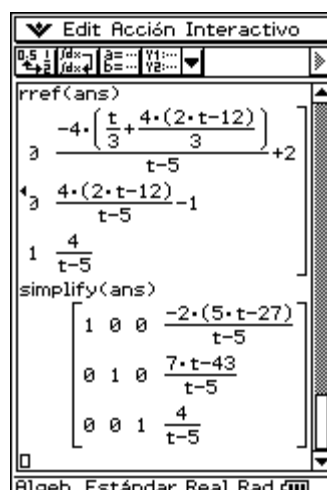
En el resultado de estas órdenes de la forma diagonal (órdenes de transformación) se obtiene así de nuevo una matriz ampliada, que contiene los coeficientes y el lado derecho de un sistema equivalente y que, a la inversa, puede ser asignada asimismo de nuevo a las diferentes notaciones del sistema. Así resultan útiles los ceros originados, y se puede identificar y escribir inmediatamente la solución (el comportamiento de soluciones con arreglo a las anteriormente citadas proposiciones 1ª a 3ª): en el caso de que $t \neq 5$ hay una solución única; en caso contrario la solución no es única (o sea tiene infinitas o no existe ninguna).

La siguiente imagen muestra primeramente la simplificación (orden **simplify(...)**) de la solución única dependiente de t ($t \neq 5$).

A continuación se produce una clara contradicción en la última línea de la matriz ampliada en el caso $t = 5$ (véase más arriba en el llamado caso2, pág. 9):

$0x + 0y + 0z = 1$, es decir no hay solución.

Este método (Algoritmo de Gauss, orden **ref(...)**, orden **rref(...)**) es universal y funciona siempre, incluso con matrices de coeficientes **A** no cuadradas



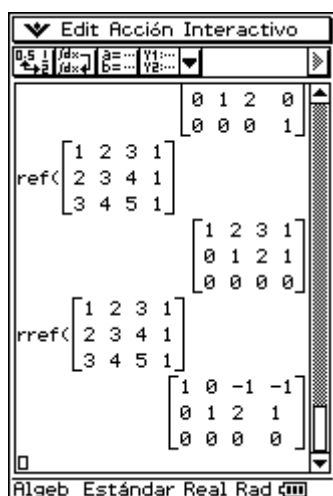
(rectangulares) o bien matrices A cuadradas no regulares, donde falla la regla de Cramer (ya que no es posible la representación de determinantes para los números buscados en el vector solución). Este método también es aplicable a matrices (ampliadas) con parámetros.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la matriz ampliada $B = [A, \vec{b}] = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}]$ es producida mediante la orden de aumento (“orden de adición”), pudiendo utilizarse esta orden secuencialmente:

augment([1, 2, 3] [2, 3, 4] [3, 4, 1], trn([4, 1, 2])) $\Rightarrow B$ 

es decir,

augment(a1, augment(a2, augment(a3, b))) $\Rightarrow B$ 



Finalmente consideremos el sistema de salida con $t = 5$ y un nuevo lado negativo $\vec{b} = \text{trn}([1, 1, 1]) = [1, 1, 1]^T$. Ahora desaparece la contradicción en la matriz resultante de la orden **ref(...)** así como **rref(...)** por la aparición de una línea completa de ceros:

$0x + 0y + 0z = 0$, es decir, quedan sólo dos filas disponibles para la lectura de la solución (múltiple) (ya que la consistente línea de ceros cumple con cualquier solución):

$1x + 0y - 1z = -1$ y $0x + 1y + 2z = 1$.

Con $z = s$ (s cualquier número real) se sigue de estas dos filas:

$x = -1 + s$, $y = 1 - 2s$ y (como ya ha quedado establecido) $z = s$, es decir el vector solución es

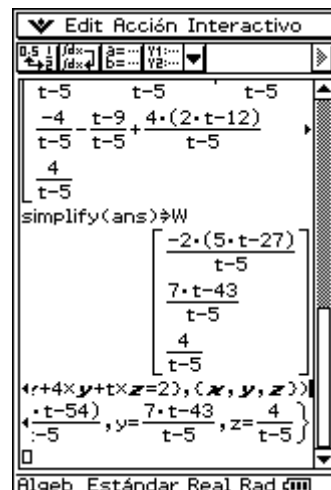
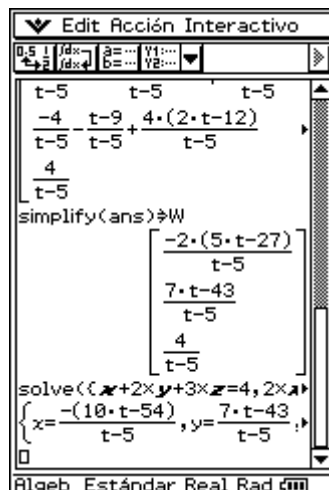
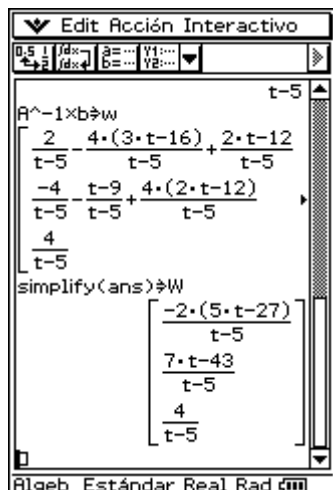
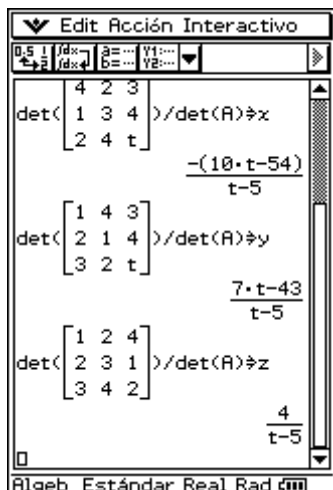
$$\vec{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 \\ -2s+1 \\ s \end{bmatrix} = s \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

La libre elección del parámetro s significa la representación de infinitos vectores solución del sistema de salida (soluciones); véase el caso 3 anteriormente citado en la página 9.

En el caso de una matriz regular A ($t \neq 5$) resultan posibles otras vías de solución a través de:

- la regla de Cramer (cálculo de determinantes con $\det(A) \neq 0$)
- la matriz inversa A^{-1} : $\vec{w} = A^{-1} \times \vec{b}$ (siempre que exista A^{-1})
- la orden **solve(...)** de la ClassPad:

solve({ $x + 2y + 3z = 4$, $2x + 3y + 4z = 1$, $3x + 4y + tz = 2$ }, { x, y, z })



Pista para iniciados

El teclado virtual , pulsando después , ofrece la posibilidad de abrir una máscara de entrada para las entradas del tipo línea de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales. El resultado aparece como una lista, que en el siguiente ejemplo es salvada con el nombre **list**. Los elementos de la lista son mostrados a través de la orden **subList**.

1.5 Sistemas de ecuaciones cuasilineales

Determinados sistemas de ecuaciones no lineales pueden ser convertidos en sistemas lineales, a través de remodelaciones o transformaciones simples.

Ejemplo

solve({ $1/x + 1/y = 8$, $1/y + 1/z = 11$, $1/x + 1/z = 13$ }, { x, y, z }) no puede ser evaluado por la ClassPad. Con la transformación $a = 1/x$, $b = 1/y$, $c = 1/z$ se origina un problema resoluble. La formación del valor inverso (Potencia con -1) se produce de manera automática para todos los elementos de la lista.

Ejemplo

solve ({ $(2x - 3)/(5y - 2) = -7/23$,
 $(5y - 4)/(3z + x) = 21/19$,
 $(7z + 2x)/(5x + 7) = -15$ }, { x, y, z })

no puede ser valorado por la ClassPad. Con Drag&Drop los denominadores se desplazan en la pantalla, encerrados entre paréntesis, hacia los numeradores de la derecha, con lo que se origina un problema resoluble.

Pista para iniciados

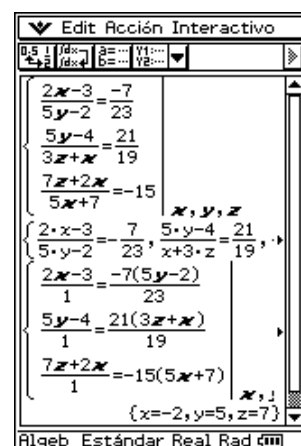
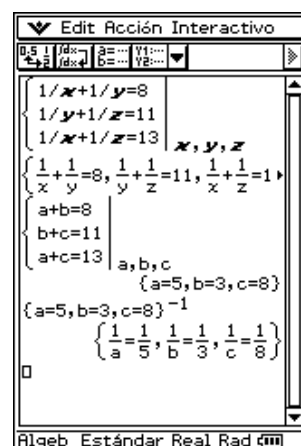
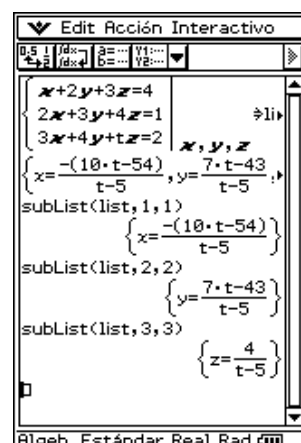
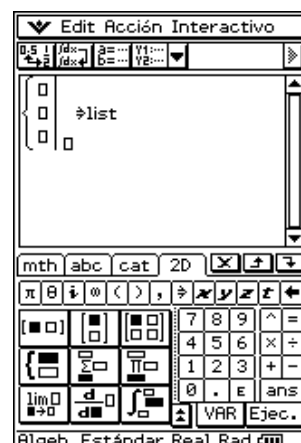
Hay planteamientos de problemas que no pueden ser valorados correctamente por la ClassPad ni por otras calculadoras CAS, como muestra el siguiente ejemplo:

$$\left. \begin{aligned} -1x + 0y + 2z &= 1 \\ 0x + 1y - 4z &= -1 \\ 3x + 2y + 0z &= 0 \\ 1x + 3y + 0z &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ es decir } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

¿Qué nos enseña este ejemplo?

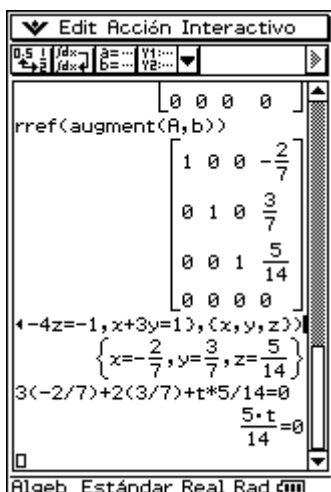
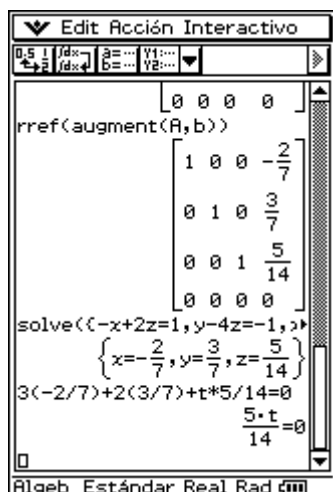
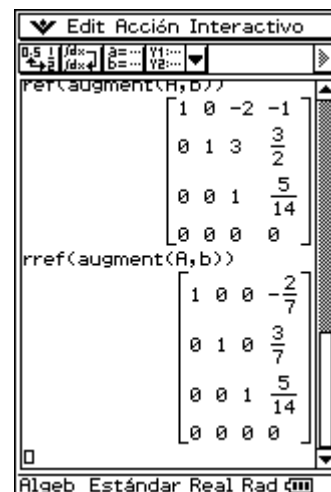
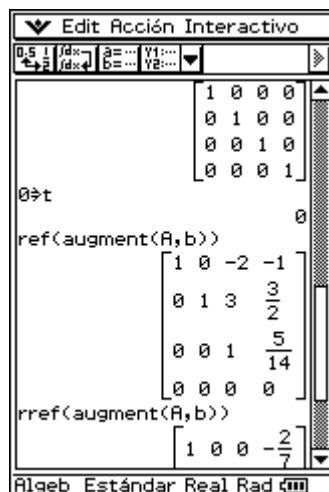
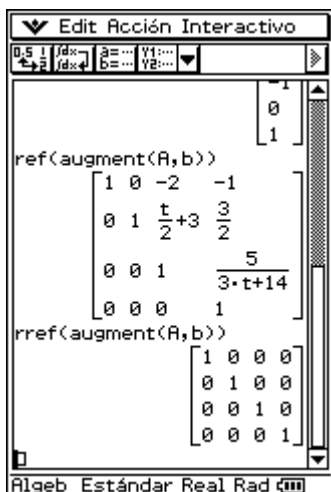
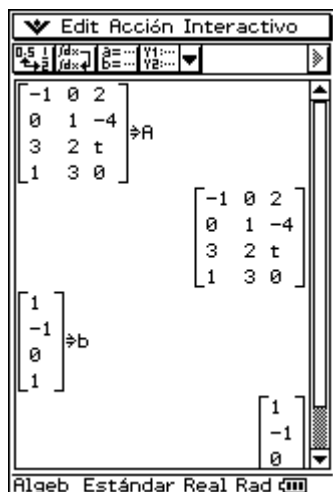
Cada calculadora de bolsillo es (solamente) un pequeño ordenador y no un ordenador científico del tipo de un PC o un Power-MAC. Así pues, el cálculo simbólico no es siempre tan rico como para que permita valorar variables simbólicas considerando una discriminación de casos sobre vías de solución diferenciadas.

Una división entre cero (variable simbólica o término variable simbólico que pueda ser cero) no siempre es reconocida, y el resultado final transformado no

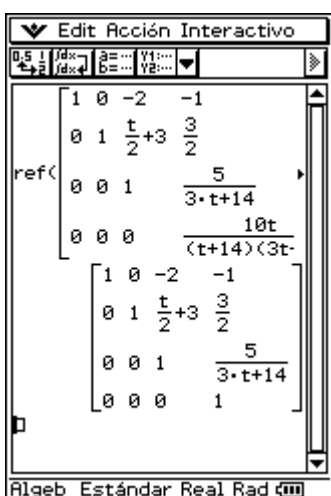
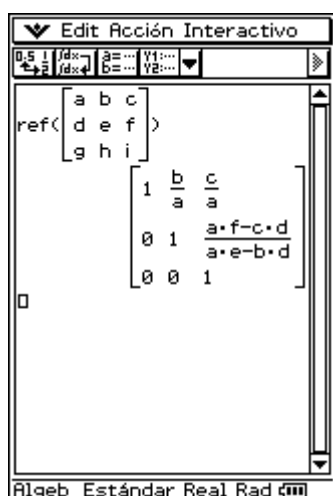


resulta entonces útil. El resultado final es erróneo en este ejemplo, ya que ambas órdenes **ref(...)** y **rref(...)** generan de manera incorrecta una cuarta línea contradictoria, e incluso en la orden **rref(...)** el parámetro **t** desaparece, como si no tuviera ninguna influencia en el comportamiento de las soluciones. En el caso **t = 0**, la solución única del sistema de ecuaciones (sobredeterminado) se determina correctamente.

En caso de duda, es recomendable una comprobación para la solución encontrada.



En el caso **t ≠ 0** las ecuaciones no paramétricas (primera, segunda y cuarta línea) producen una solución única, pero la tercera línea nos conduce en este caso a una contradicción, es decir en el caso **t ≠ 0** no hay ninguna solución.



En las imágenes de la izquierda es reconocible el efecto de la orden **ref** sobre matrices con variables simbólicas. En la matriz 3×3 las tres variables simbólicas **g, h, i** desaparecen del resultado final.

En la matriz 4×4 (Forma escalonada por filas según el algoritmo de Gauss, véase más abajo) con la orden **ref** el elemento **a₄₄** es reducido a **1** sin tener en cuenta el caso **t = 0**.

Si en el sistema considerado más arriba se pone **tz = a**, la calculadora encuentra la solución **a = 0 (t = 0)**:

$$\text{solve}(\{-x + 2z = 1, y - 4z = -1, 3x + 2y + a = 0, x + 3y = 1\}, \{x, y, z, a\})$$

no da $\{x = -2/7, y = 3/7, z = 5/14, a = 0\}$,
es decir, para $a \neq 0$ ($t \neq 0$), ninguna solución.

Consideramos el algoritmo de Gauss para el último ejemplo discutido. Así pues, trasladamos la segunda línea, que empieza con el coeficiente 0, a la última posición. Las filas restantes son inmediatamente divididas entre los coeficientes de la izquierda y empiezan con el coeficiente 1. De esta manera empieza el algoritmo de Gauss con la matriz de datos situada a la derecha.

Las Transformaciones

2ª línea menos 1ª línea y a su vez

3ª línea menos 1ª línea dan respectivamente:

La 2ª y 3ª filas son divididas entre 2/3 y entre 3 respectivamente:

Las Transformaciones

3ª línea menos 2ª línea y

4ª línea menos 2ª línea dan respectivamente:

La 3ª y 4ª línea se dividen respectivamente entre $-(3t + 14)/6$ y $-(t + 14)/2$

La transformación 4ª línea menos 3ª línea da finalmente la forma gradual de filas.

1	0	-2	-1
1	2/3	t/3	0
1	3	0	1
0	1	-4	-1
1	0	-2	-1
0	2/3	t/3 + 2	1
0	3	2	2
0	1	-4	-1
1	0	-2	-1
0	1	t/2 + 3	3/2
0	1	2/3	2/3
0	1	-4	-1
1	0	-2	-1
0	1	t/2 + 3	3/2
0	0	-(3t + 14)/6	-5/6
0	0	-(t + 14)/2	-5/2
1	0	-2	-1
0	1	t/2 + 3	3/2
0	0	1	5/(3t + 14)
0	0	1	5/(t + 14)
1	0	-2	-1
0	1	t/2 + 3	3/2
0	0	1	5/(3t + 14)
0	0	0	$\frac{10t}{(t + 14)(3t + 14)}$

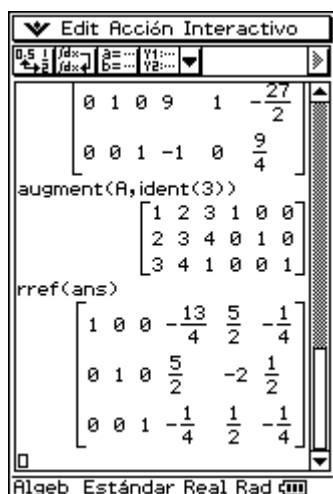
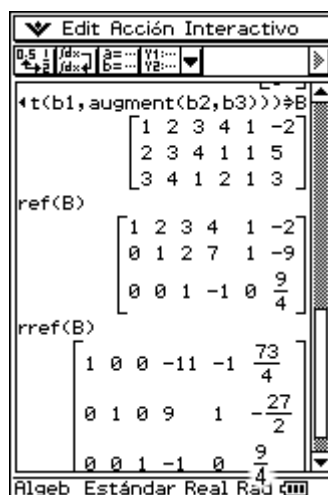
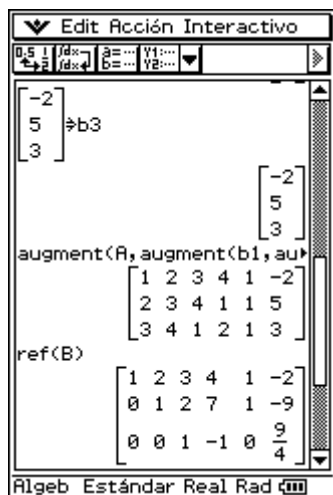
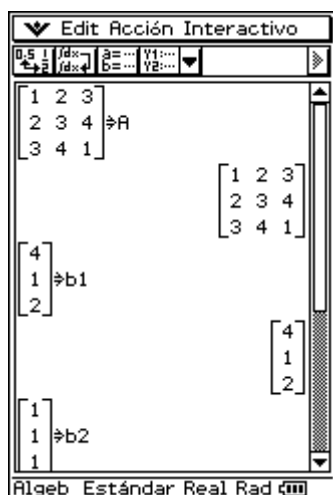
Pista para iniciados. Ecuaciones Matriciales

Las soluciones de sistema de ecuaciones con diferentes lados derechos $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \dots, \vec{b_n}$ (en la misma matriz de coeficientes A), por ejemplo $A \times \vec{w_1} = \vec{b_1}$, $A \times \vec{w_2} = \vec{b_2}$, $A \times \vec{w_3} = \vec{b_3}$ pueden ser inmediatamente determinados con una orden. Lo anterior se basa en el algoritmo de Gauss y en el hecho de que todas las transformaciones se orientan a los coeficientes de la matriz inalterada A .

Ejemplo

Consideramos la matriz original A (con $t = 1$) y tres lados derechos $\vec{b1}, \vec{b2}, \vec{b3}$:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 1z = 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 1z = 1 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 1z = 3 \end{array} \right\}$$



Ejecutamos formalmente el algoritmo de Gauss simultáneamente con los tres lados derechos, o sea consideramos la matriz ampliada $[A, \vec{b1}, \vec{b2}, \vec{b3}]$ en las órdenes **ref(...)** y **rref(...)** respectivamente.

Ejemplo adicional

Con la orden **ident(3)** se genera ahora una matriz unitaria (3,3), y con la orden **augment(A, ident(3))** se “adjunta” a la matriz: se utiliza **ref(...)** sobre esta matriz así ampliada, y así se encuentran a continuación en la mitad izquierda la matriz unitaria y en la derecha los elementos de la matriz inversa A^{-1} . La base de esta última transformación es la solución de la ecuación matricial

$$A \times [\vec{w1}, \vec{w2}, \vec{w3}] = \text{ident}(3) : [\vec{w1}, \vec{w2}, \vec{w3}] = A^{-1} \times \text{ident}(3) = A^{-1}.$$

Ejercicios

1.1 Solucione los siguientes sistemas de ecuaciones de solución única (SCD):

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } x \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

1.2 Solucione los siguientes sistemas de ecuaciones de solución múltiple y describa las (infinitas) soluciones con ayuda de parámetros.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 9 & -2 & -11 \\ 4 & 12 & -6 & -8 \\ 2 & 6 & 2 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix} \quad b) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

1.3 Solucione el siguiente sistema de ecuaciones (siempre y cuando haya soluciones).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t & t-1 & 0 \\ 3 & 3-t & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2t-1 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

- a) ¿Para qué valor de t el sistema tiene solución única? Exponga la solución.
- b) ¿Para qué t es el sistema irresoluble?
- c) ¿Para qué t existen múltiples soluciones? Exponga las soluciones.

1.4 Examine el sistema de ecuaciones lineales con la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 & t \\ 0 & 1 & 2i \\ s & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ y el lado derecho } \vec{b} = \begin{bmatrix} 3+2i \\ 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$$

¿Para qué parámetros $s \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{C}$, reales o complejos, es el sistema de solución única, múltiple o irresoluble? (i representa la unidad imaginaria).

1.5 Represente el vector $\vec{b}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$, es decir, encuentre una solución de la ecuación de vectores

$$\vec{b} = w \times \vec{a}_1 + x \times \vec{a}_2 + y \times \vec{a}_3 + z \times \vec{a}_4 :$$

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.6 Represente el vector cero $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$, es decir, encuentre una solución de la ecuación vectorial:

$$\vec{0} = w \times \vec{a}_1 + x \times \vec{a}_2 + y \times \vec{a}_3 + z \times \vec{a}_4$$

En esta ecuación vectorial (relación de dependencia) deberían aparecer el máximo posible de vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.

$$\text{a) } \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

1.7 El siguiente sistema de ecuaciones no lineal posee una estructura cuasilineal:

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 3 \\ 3a + 5b + c &= 9 \\ 2a + 3b + c &= (d-2)^2 + 2 \\ 5a + 6b + d \cdot c &= 15 \end{aligned} \right\}$$

Solucione el sistema de ecuaciones no lineal y considere para ello los vectores

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ d \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ (d-2)^2 + 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

y examine su dependencia lineal.

Sugerencia:

¿Para qué valores de d existe dependencia lineal? Calcule además los determinantes de la matriz ampliada y determine para qué valores de d es válida la ecuación $\det(\mathbf{A}, \vec{b}) = 0$.

1.6 Apéndice al capítulo 1

Generación de sistemas de ecuaciones equivalentes que contienen parámetros con la ayuda del método del intercambio.

El método del intercambio evita la “desaparición” de parámetros en sistemas de ecuaciones equivalentes, como ha sucedido más arriba con las órdenes **ref(...)** y **rref(...)** respectivamente. El método del intercambio es, además, frecuentemente más efectivo que el algoritmo de Gauss, ya que con cada paso de intercambio las tablas de datos se hacen más pequeñas y no deben seguir ningún “cálculo hacia atrás”. El pivote se elige en cada paso “a mano”.

Ejemplo:

$$\left. \begin{array}{l} -1x + 0y + 2z = 1 \\ 0x + 1y - 4z = -1 \\ 3x + 2y + tz = 0 \\ 1x + 3y + 0z = 1 \end{array} \right\} \text{ es decir } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & t \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El punto de partida es la ecuación $\vec{y} = A \times \vec{w} - \vec{b}$ con $\vec{y} = \vec{0}$ (vector cero), así como $\vec{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]^T$ y $\vec{w} = [x, y, z]^T$. Las y_i designan variables de ayuda (ceros).

Con la matriz ampliada $[A, -\vec{b}]$ vale $\vec{y} = [A, -\vec{b}] \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$

Una representación de ese sistema de ecuaciones en una tabla (Tabla inicial, abreviado **TI**) con la matriz ampliada $[A, -\vec{b}]$ da:

Intercambio de variables en $\vec{y}$ y $\vec{w}$ para la generación de sistemas equivalentes:

1) Elección de un pivote diferente de cero (ej. a_{11})

2) Escribir línea “sótano” (como línea pivote, separada por el pivote negativo), no escribir ninguna entrada bajo el pivote, aquí “*”).

TI	x	y	z	1
y_1	(-1)	0	2	-1
y_2	0	1	-4	1
y_3	3	2	t	0
y_4	1	3	0	-1
S	*	0	2	-1

Sistema **T₁** (y_1 intercambiado con x):

3) $y_1 = 0$ (variable de ayuda), bajo la cual no escribir en modo alguno ninguna entrada; aquí “*”).

4) Para las antiguas filas pivote de la Tabla Inicial escribir ahora la línea sótano. El resto de los elementos son sumados con el producto del elemento de la línea sótano situado debajo y el elemento de la columna pivote situado al lado.

5) Análogamente 1) y 2) (en **T₁** línea pivote y sótano)

T₁	y_1	y	z	1
x	*	0	2	-1
y_2	*	(1)	-4	1
y_3	*	2	$t + 6$	-3
y_4	*	3	2	-2
S	*	*	4	-1

Sistema **T₂** (y_2 intercambiado con y):

6) como 3) y 4) (con $y_2 = 0$)

7) como 1) y 2) (en **T₂** establecer línea pivote y sótano)

T₂	y_1	y_2	z	1
x	*	*	2	-1
y	*	*	4	-1
y_3	*	*	$t + 14$	-5
y_4	*	*	(14)	-5
S	*	*	*	5/14

$T_3=TF$	y_1	y_2	y_4	1
x	*	*	*	$-2/7$
y	*	*	*	$3/7$
y_3	*	*	*	$-5 + 5(t+14) / 14$ $= 5t/14$
z	*	*	*	$5/14$

Sistema $T_3 = TF$ (Tabla Final)
(y_4 intercambiado con z):

Valoración: Para $t = 0$ se cumple $y_3 = 0$ y la solución es:
 $x = -2/7, y = 3/7, z = 5/14$.

Para $t \neq 0$ no se cumple $y_3 = 0$, hay contradicción en la línea y_3 , es decir no hay ninguna solución posible.

Pista para iniciados

El número de los pasos del intercambio (= número de las tablas $T_1, T_2, \dots, TF$) es el rango de la matriz A ($= \text{Rg}(A)$).

Si este sistema de ecuaciones no homogéneo es resoluble, se cumple que $\text{Rg}(A) = \text{Rg}[A, -b]$ y viceversa.

Si este sistema de ecuaciones no homogéneo es irresoluble, se cumple que $\text{Rg}(A) < \text{Rg}[A, -b]$ y al revés.

El método de intercambio presentado se llama **Método de Intercambio con Borrado de Columnas (MIBC)**, ya que las columnas de las variables de ayuda no son rellenadas más. Con MIBC se soluciona a mano un sistema de ecuaciones de manera efectiva y no procede el cálculo hacia atrás como en el algoritmo de Gauss.

El Método de Intercambio con Borrado de Filas y Columnas (MIBFC) sirve para el establecimiento del rango de una matriz A (cómputo de posibles pasos de intercambio):

TI	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
y_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

En T_1 ($T_1, \dots, TF$) no se introducen cada vez las filas x_i -y columnas y_k - intercambiadas (en caso de que sea elegido $a_{ik} \neq 0$ como pivote).

Serían deseables los ordenes ClassPad adicionales **MIBC(A, i, k)** y **MIRang(A, i, k)** respectivamente, para la generación por pasos de tablas de datos reducidas (i, k designan aquí la posición de pivote en A).

Ejemplo

Se busca el rango de la matriz de datos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & t & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

TI	x_1	x_2	x_3	x_4	T₁	x_2	x_3	x_4	T₂	x_3	x_4	T₃	x_4
y_1	$\textcircled{-1}$	0	2	-1									
y_2	0	1	-4	1	y_2	$\textcircled{1}$	-4	1					
y_3	3	2	t	0	y_3	2	$t+6$	-3	y_3	$t+14$	-5	y_3	$5t/14$
y_4	1	3	0	-1	y_4	3	2	-2	y_4	$\textcircled{14}$	-5		
S	*	0	2	-1	S	*	4	-1	S	*	5/14		

En el caso $t = 0$ se cumple que $\mathbf{TF} = \mathbf{T}_3$, es decir, tres pasos de intercambio, y con ello **Rang** = 3.

En el caso $t \neq 0$ se cumple $\mathbf{TF} = \mathbf{T}_4$, es decir, formalmente cuatro pasos de intercambio son posibles, y con ello **Rang** = 4.

2 Cálculo de vectores, bidimensional

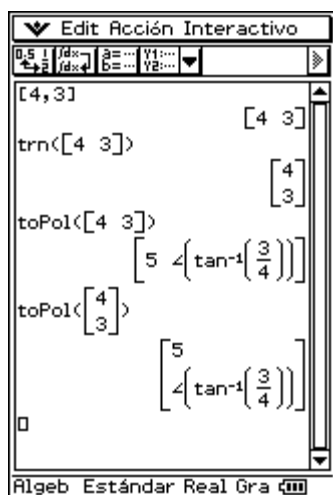
¿En qué rango angular principal se encuentran los ángulos de las coordenadas polares?

2.1 Modo angular

Lo primero que se debe determinar es si el ángulo debería ser expresado en radianes o en grados sexagesimales. La configuración del modo angular tiene lugar a través del menú “Preferencias” [**Configuración**], submenú [**Formato básico**], el cual puede ser invocado desde la línea superior del menú, a la izquierda de la ventana de trabajo principal (pulsar )

En tercera posición, en el submenú [**Formato básico**], hay ahora una opción de menú **Ángulo**. El submenú adjunto se abre habitualmente pulsando con el lápiz. De esta manera se puede, pues, elegir el modo angular (por ejemplo grados sexagesimales).

La finalización de la pantalla [**Formato básico**] debe confirmarse pulsando **Def.** (Definir) en la zona inferior; de lo contrario (por ejemplo con **Canc.** (Cancelar)) desaparece también la pantalla; sin embargo, en este caso no se almacenan los cambios, sino son rechazados.



2.2 Transformación de coordenadas en coordenadas polares

Se introduce un vector bidimensional, por ejemplo $\vec{r} = 4 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j}$

bien sea como línea

$$[4, 3] = 4 \times [1, 0] + 3 \times [0, 1]$$

o transpuesto como columna

$$[[4] [3]] = \text{trn}([4, 3])$$

o bien como número complejo

$$4 + 3i$$

Para llevar a cabo una transformación del formato de visualización (por ejemplo en representación de coordenadas polares) nos dirigimos al menú [**Acción**], el cual en el submenú [**Vector**] contiene la orden **toPol(...)**, o bien en el submenú [**Complejo**] la orden **compToPol(...)**.

Para la transformación hacia atrás en coordenadas cartesianas están disponibles los órdenes **toRect(...)** y **cExpand(...)** respectivamente. Se pueden teclear también directamente esas órdenes sobre el teclado virtual.

La imagen de la pantalla anterior permite observar que la representación en coordenadas polares de un vector se produce de nuevo como vector con radio y ángulo (con el símbolo de ángulo $\angle$, versor).

Así, la medida angular aparecía aquí con el símbolo angular ($\angle$, versor) y en modo exacto:

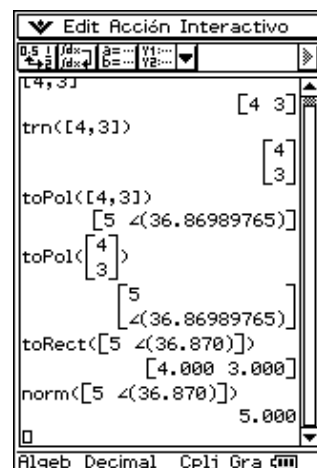
$$\arctan(3/4) \text{ (radianes)}$$

y, respectivamente, en modo decimal

$$36.870 \text{ (= } 36.870^\circ, \text{ grados sexagesimales).}$$

La última línea de entrada de la pantalla de la derecha muestra la norma del vector

$$\| [4, 3] \| = \| [5, \angle(36.870)] \| = 5.000 \text{ (Modo decimal)}$$



Pista para iniciados

Observe la diferencia entre el valor absoluto y la norma de un vector:

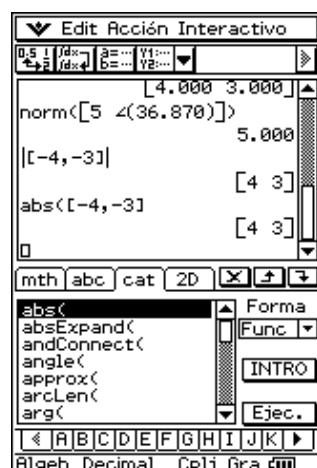
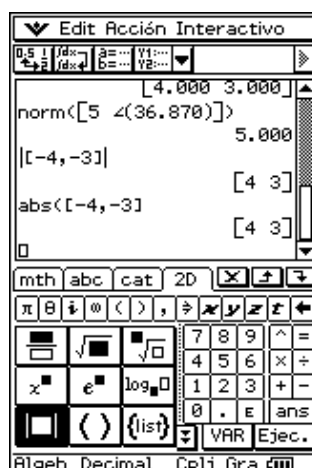
Por ejemplo:

$$\text{abs}([-4, -3]) = | [-4, -3] | = [4, 3]$$

y, por otro lado,

$$\text{norm}([-4, -3]) = \| [-4, -3] \| = 5.$$

El valor absoluto crea los valores absolutos de las coordenadas del vector, mientras que la norma da como resultado el radio para las coordenadas polares. La norma del vector describe claramente la longitud del vector bidimensional.

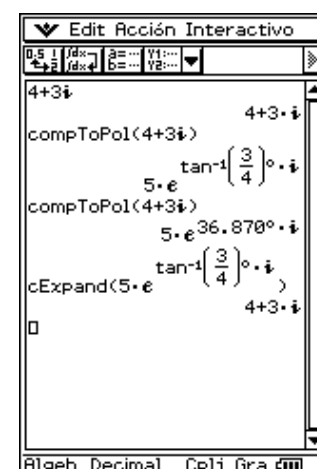
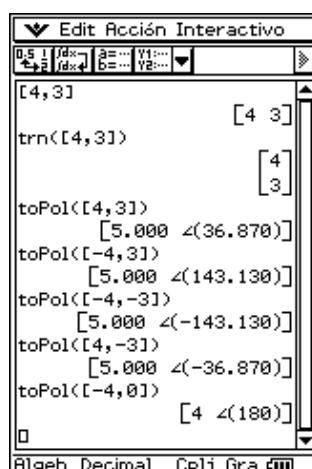


Ahora queda respondida la pregunta del principio sobre el rango angular principal para las coordenadas polares.

Para el rango angular principal rige la norma DIN:

$$-180^\circ < \theta \leq 180^\circ,$$

tal como se puede observar en la pantalla representada a la derecha. Si se llega a introducir un vector cuya segunda coordenada fuera negativa, tiene lugar la medición de ángulo en el sentido matemático negativo y se obtiene una medida angular negativa (véase por ejemplo **toPol([4, -3])**).



A menudo se cuenta con el rango angular principal $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, el cual, sin embargo, no se corresponde con la recomendación DIN. (DIN es un acrónimo de Deutsches Institut für Normung). La calculadora de bolsillo está programada siguiendo las normas DIN.

También se puede teclear las órdenes directamente sobre el teclado virtual, y así introducir los vectores sobre las máscaras de entrada del menú virtual 2D.

La última de las pantallas mostradas presenta la transformación de la representación aritmética de un número complejo en la representación de coordenadas polares (en modo exacto y en modo decimal). Después se efectúa la transformación inversa con ayuda de la orden **cExpand**. Se ve que la representación en coordenadas polares de un número complejo tiene lugar en la forma exponencial.

Pista para iniciados

Debe tenerse muy en cuenta el modo angular configurado, ya que las transformaciones en coordenadas polares siempre se dan sin unidad de medida, es decir, $\angle(3,14)$, según sea el valor por defecto, puede significar $3,14^\circ$ o $3,14 \times 180^\circ / \pi = 179,91^\circ$.

En el caso de la transformación de coordenadas polares de nuevo en coordenadas cartesianas, puede utilizarse la unidad de medida grado sexagesimal, independientemente del modo angular configurado. Sin unidad de medida, la entrada es interpretada según el modo angular configurado.

El símbolo de grado sexagesimal $^\circ$ se encuentra en el teclado virtual en el menú **mth** (abrir menú **Trig**)

Las órdenes de transformación para números complejos son aplicables también sobre vectores con números complejos:

$$\text{compToPol}([1+i, -1-i]) = \dots \quad \text{compToPol}\left(\begin{bmatrix} 1+i \\ -1-i \end{bmatrix}\right) = \dots$$

Ejercicios

- 2.1 a) El profesor de matemáticas ha definido el rango angular principal como sigue: $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$.

Dé la representación en coordenadas polares para el vector $\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$.

- b) El profesor de física ha definido el rango angular principal como sigue: $-\pi < \theta \leq \pi$.

Dé la representación en coordenadas polares para el vector $\begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$.

- 2.2 Dé para los siguientes vectores la representación en coordenadas polares (ángulo en grados sexagesimales y de rango principal $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$):

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

- 2.3 Dados los siguientes vectores fila en coordenadas polares:

$$[3, \angle(30^\circ)], [1, 3\pi/4], [2, -145^\circ], [4, \pi],$$

transforme dichos vectores en la representación cartesiana.

- 2.4 a) Dado el vector simbólico $\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$, ¿cómo resulta la transformación en coordenadas polares en el caso $h \neq 0$, y si $h = 0$, respectivamente?

- b) Demuestre la corrección de la siguiente representación en coordenadas polares del vector simbólico dado en el apartado a):

$$\begin{bmatrix} \sqrt{(g^2 + h^2)} \\ \angle(-\arctan(g/h) + \text{signum}(h) \times \pi/2) \end{bmatrix}, \text{ o bien } \begin{bmatrix} |g| \\ \angle(1 - \text{signum}(g) \times \pi/2) \end{bmatrix} (h = 0).$$

3 Cálculo de vectores, tridimensional

¿En qué rango angular principal se encuentran los ángulos de las coordenadas esféricas?

3.1 Modo de representación

Además de la representación en coordenadas cartesianas (rectangulares), en los vectores tridimensionales se usa, no ya las coordenadas polares como anteriormente, sino las coordenadas cilíndricas, o bien las esféricas. Éstas pueden ser seleccionadas, como las coordenadas polares en el caso bidimensional.

Las órdenes se llaman en este caso **toCyl()** o **toSph()** y son accesibles directamente en el mismo menú **[Acción]** submenú **[Vector]** como la orden anterior **toPol()**.

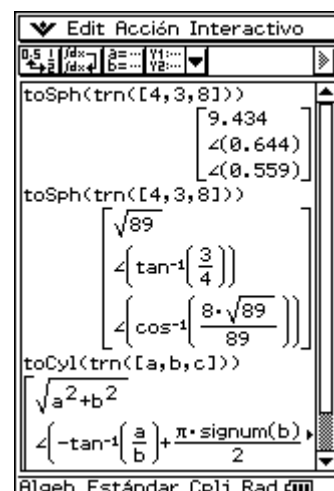
En un sistema de coordenadas “dextrogirotorio” (sistema a derechas) las visualizaciones se dividen como sigue:

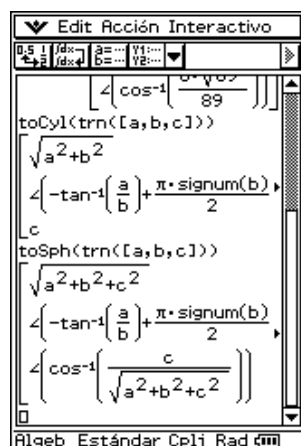
Sistema de coordenadas	Representación	¿Qué significa qué?
Coordenadas rectangulares (cartesianas)	$[x; y; z]$	x : Coordenada del eje de las x y : Coordenada del eje de las y z : Coordenada del eje de la z
Coordenadas cilíndricas	$[r; \theta; z]$	r : Distancia horizontal al eje z θ : Ángulo con el plano (x, z) z : Distancia con su signo algebraico al plano (x, y)
Coordenadas esféricas	$[\rho; \theta; \phi]$	ρ : Distancia tridimensional al punto cero θ : Ángulo con el meridiano cero ϕ : Ángulo con el eje polar (eje z)

La representación de la conversión se producirá según fueran las configuraciones por defecto en **grados sexagesimales**, **radianes** o en **modo exacto** (es decir **decimal**):

La representación en **Modo Standard** para un vector tridimensional, en el caso de introducción de números enteros, comporta la representación exacta de la conversión en coordenadas cilíndricas o esféricas, mostrándose ésta última conversión aún más complicada.

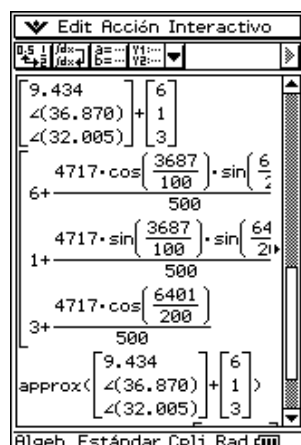
Mediante el cálculo simbólico es posible mostrar los cálculos internos de la ClassPad 300, de manera que aparezcan las estructuras de las fórmulas.





Así por ejemplo se puede ver la representación del ángulo de azimut (dirección al plano x - y , “dirección de la brújula”) por transición de las coordenadas rectangulares a las cilíndricas:

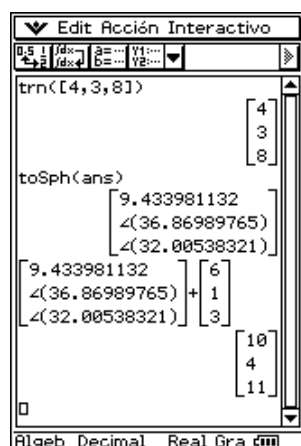
... o a las esféricas:



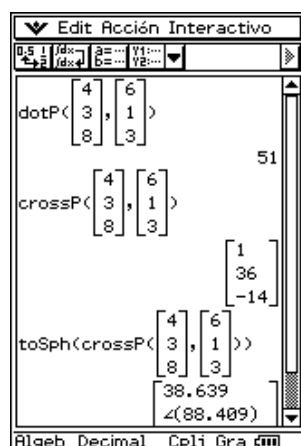
Aquí aparece otra vez la entrada del vector original en coordenadas esféricas y modo de número decimal como primer sumando:

Si se desea ahora sumar a éste un segundo vector, expresado en cualquier otra forma de coordenadas (rectangulares o cilíndricas), puede hacerse sin necesidad de cambiar el formato.

Añadimos simplemente el vector **trn([6, 1, 3])**:



Desafortunadamente, surge el fallo menor de que la entrada del primer sumando ya no vuelve a aparecer redondeada, sino en el formato máximo de diez decimales (dependiendo del formato numérico introducido).



3.2 Producto escalar y vectorial

El **Producto Escalar** se puede generar con la orden **dotP()** (producto punto, producto interno), la cual se encuentra en el menú **[Acción]**, submenú **[Vector]**, es decir en el mismo submenú de las operaciones de vectores anteriores.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{dotP} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 51$$

Sugerencia:

Se obtiene el mismo resultado cuando en lugar de los vectores columna se introducen vectores fila:

$$[4, 3, 8] \cdot [6, 1, 3] = \text{dotP}([4, 3, 8], [6, 1, 3]) = 51.$$

También se puede obtener este resultado con ayuda de la multiplicación de matrices:

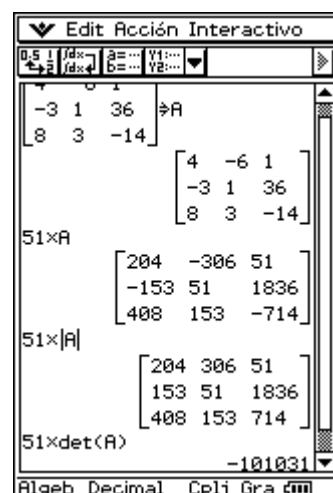
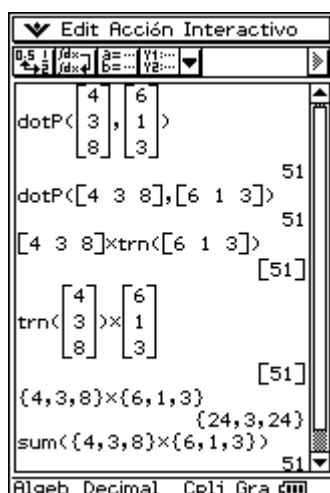
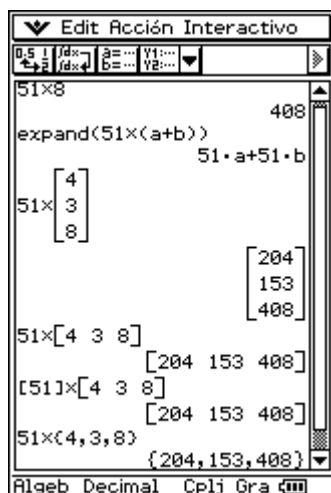
$$[4, 3, 8] \cdot [6, 1, 3] = [4, 3, 8] \times \text{trn}([6, 1, 3]) = [51]$$

o sea:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{trn} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = [51]$$

Aquí se introduce el signo $\times$ con ayuda de la tecla de multiplicación de la ClassPad 300, es decir, la tecla de multiplicación $\otimes$ tiene varios significados:

- Multiplicación de números (ambos operandos son números, Aritmética de Números)
- Multiplicación de matrices (ambos operandos son matrices, multiplicación de matrices)
- Multiplicación escalar (un operando es un número y el otro es una matriz o un vector o una lista)
- Multiplicación de listas (ambos operandos son listas, aritmética de listas)



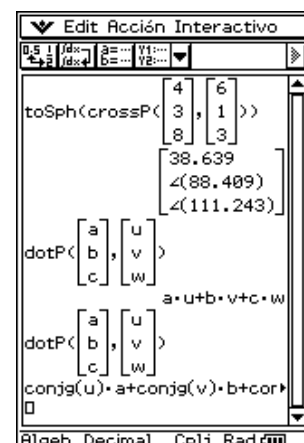
La penúltima multiplicación muestra que las líneas verticales simbolizan el valor absoluto y no el determinante.

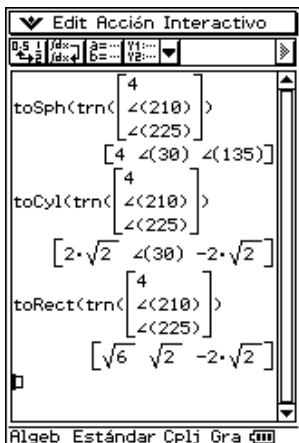
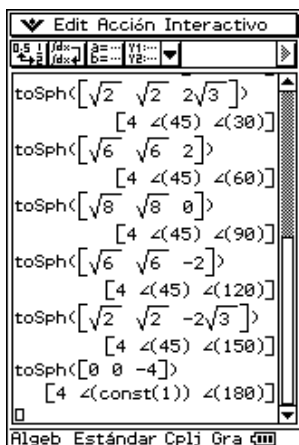
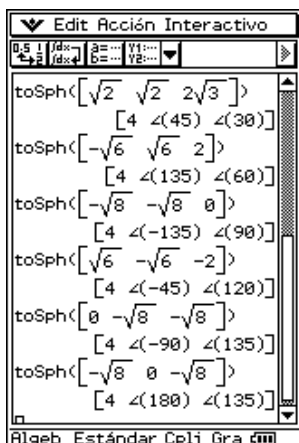
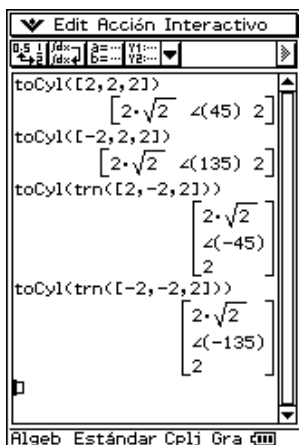
El **Producto Vectorial** (producto cruz, producto externo) $\vec{r} \times \vec{s}$ se obtiene con la orden **crossP()**,

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{crossP} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 36 \\ -14 \end{bmatrix}$$

Aquí también es lo mismo en qué forma se introducen los vectores (vectores columna o fila). La función **toSph()** u otras pueden igualmente concatenarse en el mismo cálculo.





Si se introducen dos vectores en forma simbólica, como se representa en la imagen anterior, resultan claros de nuevo los pasos para obtener el producto.

En este momento se puede responder a la pregunta formulada al principio del capítulo sobre el rango angular principal para las coordenadas cilíndricas o esféricas.

Para el rango principal del ángulo θ rige la especificación normalizada DIN,

$$-180^\circ < \theta \leq 180^\circ,$$

como se puede ver en la pantalla mostrada a la izquierda. Si se introduce un vector cuya segunda coordenada sea negativa, resulta una medida angular en el plano x - y con sentido de giro negativo y se obtiene una medida angular negativa; véase por ejemplo:

toCyl([2, -2, 2]) o bien toSph([2, -2, 2]): $\theta = -45^\circ$

A menudo θ se calcula también con el rango angular

$$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$$

el cual sin embargo no cumple la recomendación DIN. La calculadora de bolsillo ha sido programada según la norma DIN.

Para el rango angular de ϕ (ángulo con el eje z) rige la especificación $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, como se puede ver en la imagen de pantalla mostrada a la izquierda.

En Geodesia ϕ se calcula a menudo con el rango angular $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, es decir los ángulos de elevación se calculan desde el plano ecuatorial:

Así pues, los puntos por encima del plano ecuatorial tienen un ángulo de elevación positivo, y los que están por debajo, negativo.

Para un punto que se halle sobre el eje z no hay un ángulo θ único: el ángulo se expresa como $\theta = \text{const}(1)$; véase la tercera imagen de esta página.

Ejemplo

La conversión de un vector dado en coordenadas esféricas en sus coordenadas esféricas Standard; véase la última imagen de esta página:

Se convierten los correspondientes ángulos que no se encuentran en el rango angular principal dado más arriba.

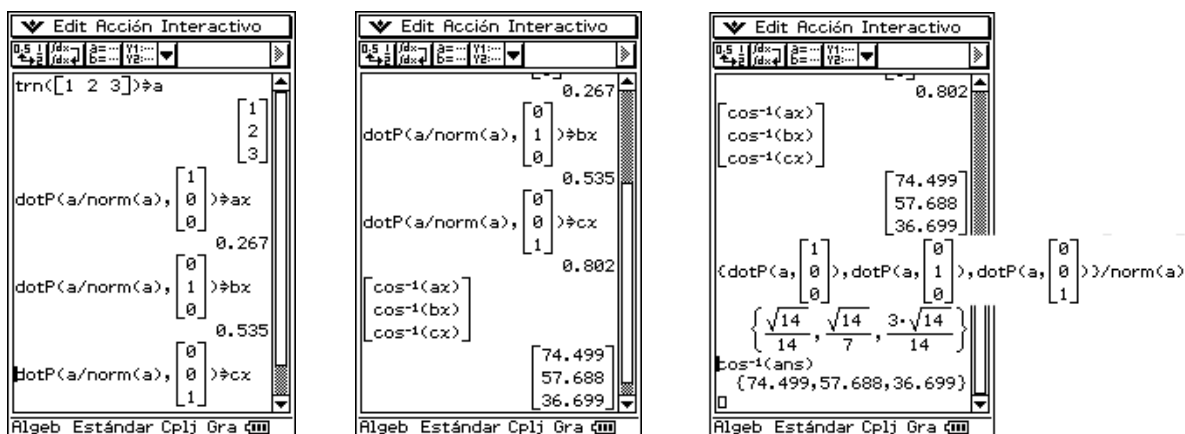
Las coordenadas cilíndricas se dan igualmente con el ángulo principal θ descrito arriba.

Las coordenadas cartesianas corresponden igualmente a las coordenadas esféricas dadas anteriormente.

El **coseno direccional** describe el valor del coseno del ángulo de un vector $\vec{a}_0$ normalizado con el vector unitario de un eje de coordenadas y puede calcularse como se ve a continuación (véanse las imágenes de la página 29):

$$\cos(\alpha) = \vec{a}_0 \cdot \vec{i}, \quad \cos(\beta) = \vec{a}_0 \cdot \vec{j}, \quad \cos(\gamma) = \vec{a}_0 \cdot \vec{k}.$$

Calculamos el vector $[\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)]$, o sea la lista $\{\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)\}$ del valor del coseno, y finalmente el ángulo por medio de **arccos()** en la ClassPad 300 como sigue:



La aritmética de listas se revela ventajosa para calcular todos los ángulos al mismo tiempo:

La función $\cos^{-1}()$ es utilizable sobre una lista pero no sobre un vector.

Ejercicios

- 3.1 a) ¿Cómo se representan los vectores de enlace $\vec{a}$ de $P_1(1, -1, 0)$ a $P_2(3, 1, -1)$ y $\vec{b}$ de $Q_1(0, 0, 1)$ a $Q_2(2, 2, 0)$? Argumente el resultado.
 b) Determine la norma $\|\vec{a}\|$ (longitud de $\vec{a}$), el coseno direccional de $\vec{a}$ y el vector unitario $\vec{a}_0$ de $\vec{a}$.

c) ¿Qué tamaño tienen los ángulos que forma $\vec{a}$ con los ejes de coordenadas y planos de coordenadas?

- 3.2 Dados los siguientes vectores:

$$\text{a) } \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j}, \quad \text{b) } \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}.$$

Calcule el vector $\vec{b}_0$ así como la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

Sugerencia: La proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ es el vector $\vec{a}_b = \text{dotP}(\vec{a}, \vec{b}_0) \cdot \vec{b}_0$.

- 3.3 ¿Qué ángulo encierran los vectores $\vec{a} = (4, 3, 9)^T$ y $\vec{b} = (1, 1, -1)^T$ y qué longitud tiene la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$?

- 3.4 Determine para el vector $\vec{x}$ las proyecciones sobre los ejes de coordenadas y sobre los planos de coordenadas y la longitud de las mismas, así como la longitud del propio $\vec{x}$.

$$\text{a) } \vec{x} = (3, -4, 1)^T, \quad \text{b) } \vec{x} = (-2, 1, -3)^T.$$

- 3.5 Determine para el vector $\vec{x}$ las coordenadas cilíndricas así como las esféricas.

$$\text{a) } \vec{x} = (3, -4, 1)^T, \quad \text{b) } \vec{x} = (-2, 1, -3)^T.$$

- 3.6 Dados los vectores $\vec{a} = (1, -2, 3)^T$, $\vec{b} = (3, 0, 4)^T$ y $\vec{c} = (-2, 4, 5)^T$.

Calcule los siguientes productos: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}, \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2, (\vec{a} \times \vec{b})^2, (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

- 3.7 $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(1, 1, 2)$, $M_3(2, 3, -1)$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Determine los vértices P_1 , P_2 , P_3 , los ángulos α_1 , α_2 , α_3 y el área del mismo.

4 Cálculo de vectores, n-dimensional

¿Qué diferencia existe entre la conversión a valor absoluto y el cálculo de la norma?

En el cálculo de vectores se aplica ocasionalmente la simbología del valor absoluto en los números, por ejemplo. $|-6| = 6$, al cálculo de la norma en vectores: $|(-3, 1, 2, 0, -5)^T|$.

¡En este caso debe aclararse qué se calculará!

La calculadora simbólica de bolsillo puede calcular tanto el vector de los valores absolutos como la norma:

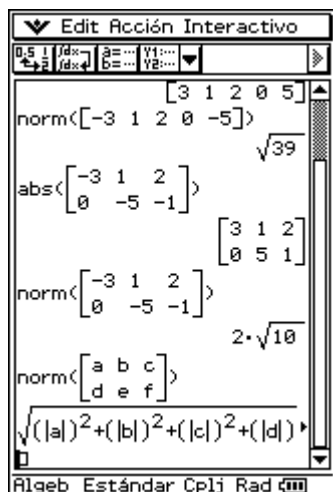
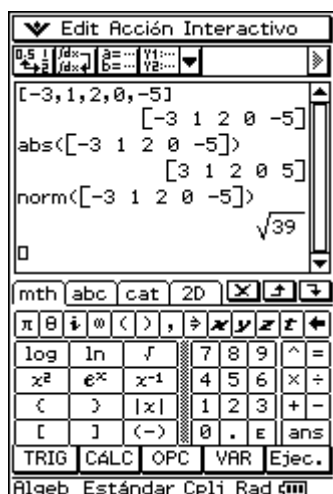
$$|(-3, 1, 2, 0, -5)^T| = (|-3|, |1|, |2|, |0|, |-5|)^T = (3, 1, 2, 0, 5)^T$$

$$\|(-3, 1, 2, 0, -5)^T\| = ((-3)^2 + (1)^2 + (2)^2 + (0)^2 + (-5)^2)^{1/2} = 39^{1/2}$$

y para ello dispone de dos órdenes diferentes:

$$|(-3, 1, 2, 0, -5)^T| = \text{abs}(\text{trn}([[-3, 1, 2, 0, -5]])) = (3, 1, 2, 0, 5)^T$$

$$\|(-3, 1, 2, 0, -5)^T\| = \text{norm}(\text{trn}([[-3, 1, 2, 0, -5]])) = 39^{1/2}.$$



Pista para iniciados

Obsérvese que en la calculadora de bolsillo los vectores siempre son introducidos entre corchetes (como las matrices).

Las órdenes **abs(...)** y **norm(...)** se pueden utilizar no sólo sobre números y vectores, sino igualmente sobre matrices.

Mientras que la orden **norm(Vector)** calcula la **Norma Euclidiana** del Vector, **norm(Matriz)** es la **Norma Frobenius** de una matriz.

5 Números complejos

¿Por qué resulta más ventajoso calcular con ángulos expresados en radianes que expresados en grados sexagesimales?

La introducción de números complejos en la ClassPad300 se realiza mediante la unidad imaginaria i ($=\sqrt{-1}$). Sin embargo, en este escrito se utilizará la j , habitual en Electrotecnia y Física.

Introducción de números complejos en formato de notación de las componentes	O en la forma de Euler
$4 + 3j$ (notación técnica)	$5 \cdot e^{i \cdot \arctan(3/4)}$
$4 + 3i$ (introducción de datos en la calculadora)	

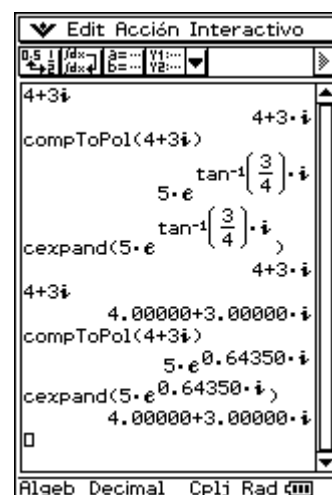
Pista para iniciados

Realice en principio los cálculos complejos en modo RAD (Modo Radianes). En caso de que desee el resultado en modo DEG (grados sexagesimales) transforme el cálculo a DEG solamente AL FINAL, una vez ya ha sido determinado el resultado en RAD.

Aclaración:

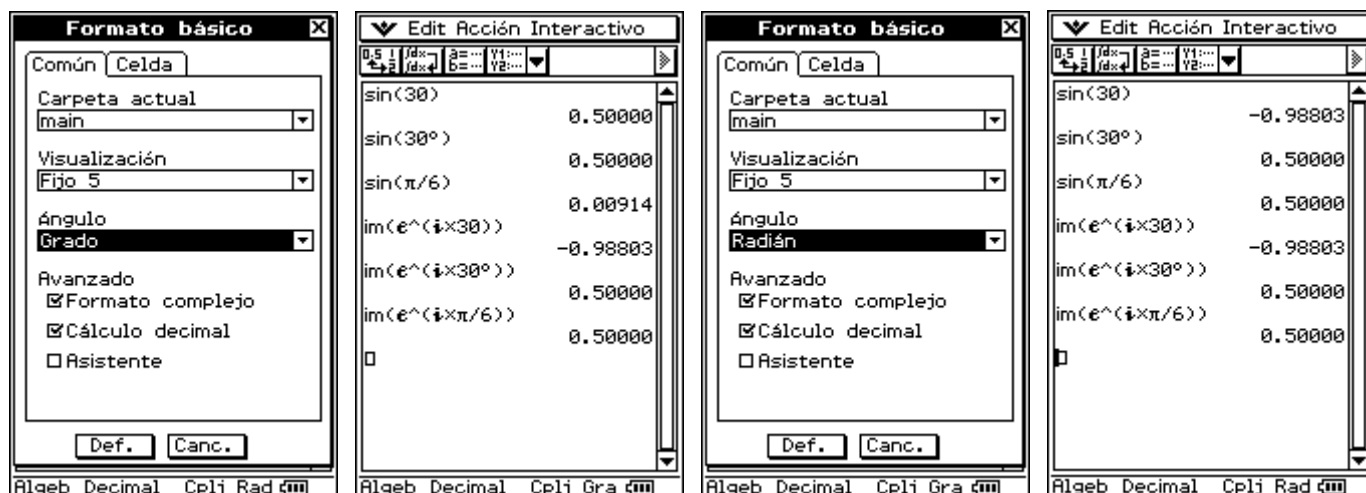
La función **arctan** se expresa en la calculadora como $\tan^{-1}$.

De este modo aquí $\tan^{-1}(3/4)$ no significa $(\tan(3/4))^{-1} = \cotan(3/4)$.



Ejemplo

El efecto del modo angular preconfigurado sobre el argumento de $\sin(x)$ y $\text{im}(e^{i \cdot x})$ ($=\sin(x)$) es en parte diferente si se expresa en modo de grados sexagesimales, o bien en modo de medida en radianes:



5.1 Modo de grados sexagesimales

Los argumentos **30** o $\pi/6$ respectivamente introducidos en las funciones **sin** o **e** en la ClassPad 300 son interpretados por ésta de forma diferente. Debido a ello pueden producirse diversos errores de cálculo.

En modo de grados sexagesimales **sin(30)** es interpretado igual que **sin (30°)**; sin embargo **im(e^(i * 30))** es interpretado como entrada en radianes independientemente del modo angular preconfigurado, a no ser que la entrada sea en unidades de grados sexagesimales: **im(e^(i * 30°))**.

5.2 Modo de radianes

Los argumentos **30** o $\pi/6$, respectivamente introducidos en las funciones **sin** o **e** en la ClassPad 300, son interpretados por ésta de la misma manera. Debido a ello no pueden producirse errores de cálculo.

En modo de radianes, **sin(30)** es interpretado igual que **im(e^(i * 30))**, a no ser que la entrada sea en unidades de grados sexagesimales:

$$\sin(30^\circ) = \text{im}(e^{(i * 30^\circ)}). \quad 30[\text{Rad}] \text{ son } 30/\pi * \pi = 9,549 \pi.$$

Igualmente se cumple que **sin($\pi/6$)** es interpretado en modo radianes como **im(e^(i * $\pi/6$))**.

Por eso debería calcularse preferentemente en radianes, ya que ya que en modo radianes las funciones trigonométricas y las no trigonométricas interpretan las entradas numéricas como medidas sin dimensión.

En modo de grados sexagesimales, las entradas numéricas son consideradas en algunos casos como valores sin unidades de una entrada en grados sexagesimales: $30 = 30^\circ$; sin embargo no en todos los casos, ya que no está previsto un argumento en grados sexagesimales para todas las funcionales.

5.3 Más notaciones de entrada y de salida para números complejos.

Notación trigonométrica: $r * (\cos(\theta) + i * \sin(\theta))$

Notación de par de números (coordenadas cartesianas): $[a, b] = a + i * b$

Simbología de Versor (Coordenadas polares): $[r, \angle \theta] = r * (\cos(\theta) + i * \sin(\theta))$

La notación de par de números y la de simbología de versor no son recomendables para el cálculo con números complejos y deberían servir exclusivamente para la presentación de resultados

La transformación en la notación de pares de números se produce con la orden **[re(z), im(z)]**.

Las coordenadas polares se obtienen mediante: **toPol([re(z), im(z)])**.

Se puede ver el rango del ángulo principal $-\pi < \theta \leq \pi$, es decir $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$.

La transformación de la notación de par de números nuevamente a la representación aritmética se obtiene con

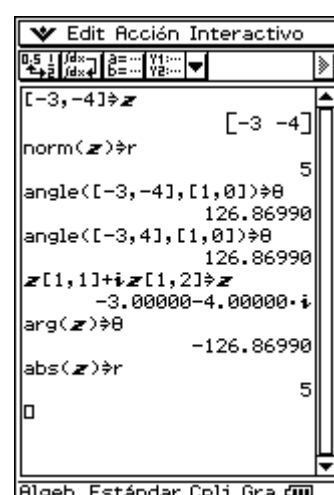
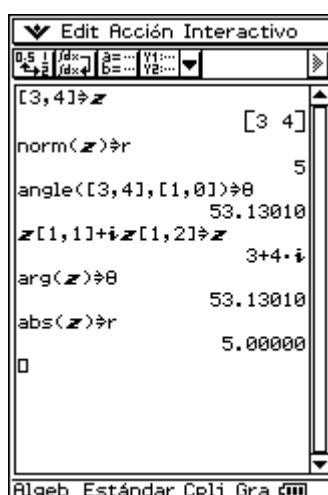
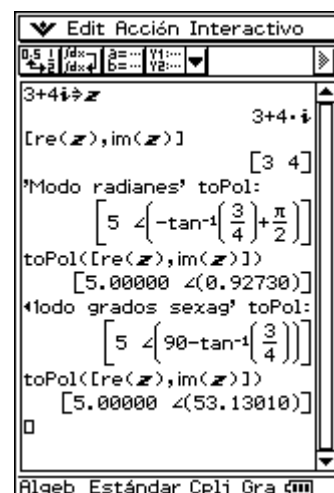
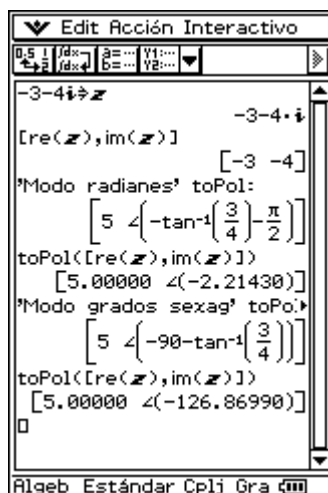
$z = [3, 4]$ como $z[1, 1] + i \cdot z[1, 2] = 3 + i \cdot 4$.

De esta manera determina $z[1,1]$ la primera coordenada del Vector $z = [3, 4]$; $z[1,2]$ determina la segunda coordenada.

Las imágenes dejan claro que la medida angular para números complejos tiene signo:

Los números complejos por debajo del eje de las x tienen un ángulo negativo.

En la notación de pares de números (vectorial) la medida angular no tiene signo.

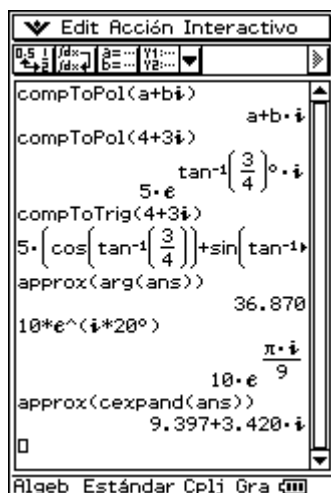


5.4 La representación de módulo-argumento (representación exponencial, forma de Euler).

La elección (configuración) del modo angular se obtiene a través del Menú **[Preferencias] [Configuración]**, submenú **[Formato básico]**, que se puede invocar desde la ventana de trabajo principal en la línea de menús arriba a la izquierda. En el tercer elemento desplegable (**Ángulo**) del cuadro de diálogo *Formato básico* se puede alternar entre dos modos posibles: *Radián* y *Grado* (sexagesimales). Debe elegirse preferentemente *Radián*. En el siguiente elemento del cuadro, bajo **Avanzado** debe marcarse la casilla del elemento **Formato Complejo**.

Para llevar a cabo la transformación del formato de visualización a la representación en coordenadas polares nos dirigimos al menú **[Acción]**, el cual en el submenú **[Complejo]** contiene las órdenes de transformación **compToPol()**, **compToTrig()** o **cExpand()**.

Use la orden **compToPol()** para obtener la representación módulo-argumento. Si se introduce un número complejo, la orden **compToPol()** lo convierte a la forma $r * e^{\theta i}$.

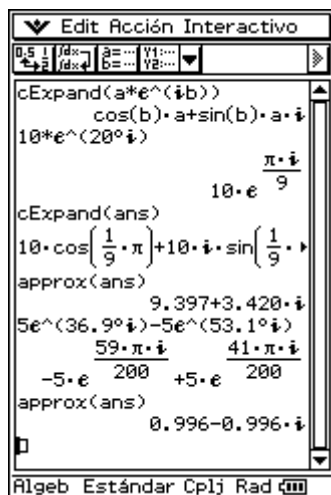


La orden **compToPol()** es independiente del modo de introducción de datos, de manera que las entradas en la forma de componentes (representación aritmética) o en representación trigonométrica son también admisibles en grados sexagesimales, de manera que en las medidas angulares en Deg el símbolo del grado ° (en el teclado virtual elija **nth** y después **Trig**) debe ir unido a la medida angular, pues si no la calculadora podría interpretarla como radianes.

Si se introduce un número complejo en la forma **compToPol(a + j b)** no se obtiene en principio ninguna transformación con la ClassPad 300, ya que el software no puede reconocer a qué tipo numérico se asignan las variables. Sin embargo módulo y argumento pueden ser calculados simbólicamente, como se muestra en el siguiente párrafo. Si se substituyen **a** y **b** por números decimales se transforma el ángulo de acuerdo con el modo configurado (RAD o DEG).

5.5 La representación Parte real - Parte imaginaria (notación de componentes)

Para volver a obtener la salida en representación aritmética nos dirigimos al menú **[Acción]**, el cual en el submenú **[Complejo]** contiene la orden de transformación.



Si se introduce ahora un número complejo en la notación de Euler (con lo cual la **e** NO es la variable simbólica del teclado sino la función **e**, que se encuentra en el teclado virtual en la pestaña **nth**) es transformado automáticamente en la forma de componentes mediante **cExpand()**. Para ello debe ser identificado como tal un ángulo en DEGREE(°), tal como se ha indicado antes.

Una preconfiguración en el modo DEGREE no ayuda, sino más bien produce, en el peor de los casos, errores de cálculo, ya que la ClassPad 300 interpreta como radianes el ángulo introducido en el exponente.

He aquí un ejemplo con variables simbólicas o, para ser más preciso, con números decimales:

En la Teoría de la Oscilación surge a menudo el problema de que se debe sumar números complejos que se encuentran en la forma de Euler. La ClassPad 300 ahorra al usuario la conversión necesaria para ello, como muestra el siguiente ejemplo:

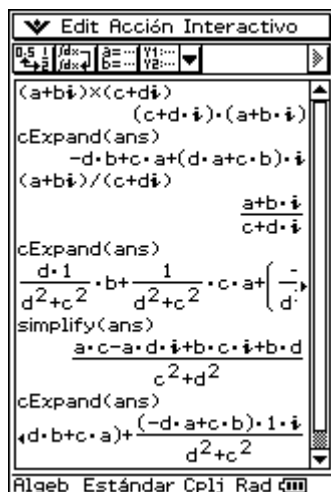
$$(5 * e^{(36.9^\circ j)} + 5 * e^{(53.1^\circ j)}) \quad \text{ó} \quad (5 * e^{(36.9^\circ j)} - 5 * e^{(53.1^\circ j)})$$

Producto y cociente de dos números complejos son calculados en principio igual. Como ejemplo fácil de estudiar proponemos:

$$4 + 3j = 5 * e^{(36.9^\circ j)} \quad \text{y} \quad 3/2 + 2j = 2.5 * e^{(53.1^\circ j)}$$

El menú **[Acción]** contiene en el submenú **[Complejo]** cuatro órdenes adicionales para tratar con números reales. Las órdenes individuales de manera resumida son:

conjg() : conjuga número complejo
re() y **im()** : parte real y parte imaginaria (real)
arg() : ángulo (argumento) del número complejo

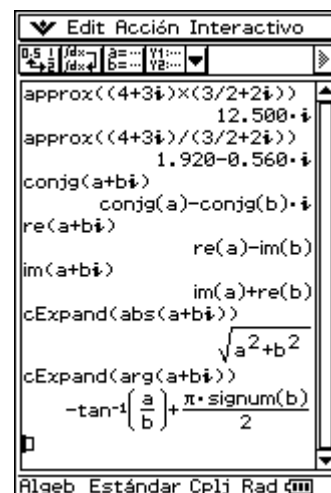


Para el cálculo del módulo de un número complejo se utiliza la orden **abs()**, que se encuentra en el teclado virtual **math** como $|x|$. Presionando $|x|$, aparece sin embargo en la línea de entradas **abs()**. El resultado, no obstante, vuelve a ser presentado con las barras del módulo.

abs(): Módulo del número complejo

Ejemplo

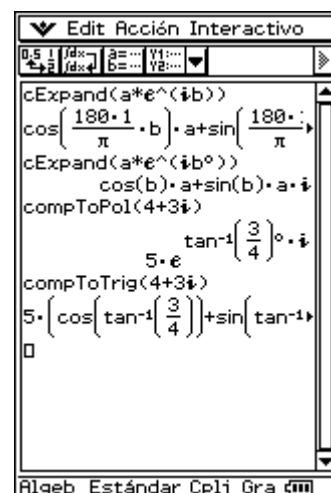
$$\text{abs}(a + b * j) = |a + b * j| \quad y \quad \text{cExpand}(\text{ans}) = \sqrt{a^2 + b^2}$$



5.6 Cálculo con números complejos en modo de grados sexagesimales

En la representación exponencial, el argumento angular b es interpretado en la línea de entradas como radianes, y por tanto convertido a grados sexagesimales en la línea de salidas.

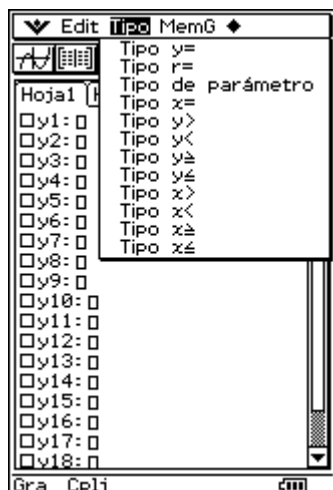
Sin embargo, si se usa adicionalmente el símbolo de grado sexagesimal, y así se introduce el argumento angular como b° , entonces b es interpretado como un valor en grados sexagesimales. No obstante, las salidas en grados sexagesimales de las funciones trigonométricas se producen sin el símbolo del grado sexagesimal: **cos(b)** y **sin(b)** en lugar de **cos(b°)** y **sin(b°)**, aunque se introdujo b° . Después de la conversión, en la representación exponencial se presenta de manera interesante el ángulo **arctan(3/4)**, una vez con notación sexagesimal (en la representación exponencial) y otra sin (en la trigonométrica). Este ejemplo clarifica de nuevo por qué es recomendable el cálculo en radianes para descartar de antemano posibles fuentes de errores.



6 Representación gráfica de funciones y gráficos estadísticos

(Gráfico 2-D)

¿Cuándo resulta ventajoso el escalado logarítmico de la ventana de visualización?

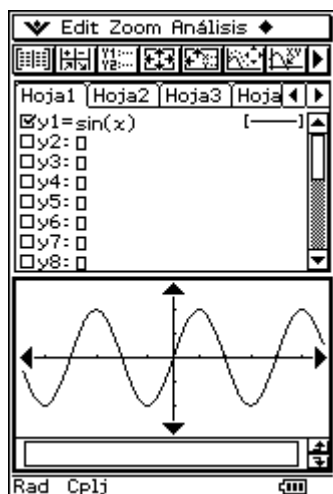


6.1 Representación gráfica de funciones

Para representar gráficamente funciones del tipo $y = f(x)$ se abre en el menú **Gráficos &T...** el submenú **Tipo** y se elige el primer punto del menú (**Tipo y =**). Al abrirse la ventana de diálogo aparecen las siguientes opciones:

Tipo y = , es decir:	$y = f(x)$
Tipo r = , es decir:	$r = r(\theta)$
Tipo de parámetro , es decir:	$x = x(t), y = y(t)$
Tipo x = , es decir:	$x = f(y)$

así como (a través de superficies limitadas por curvas)

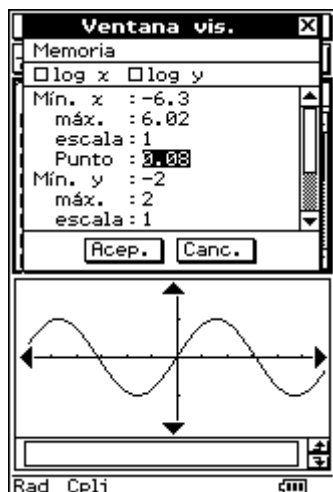


Tipo y > , es decir:	$y > f(x)$
Tipo y < , es decir:	$y < f(x)$
Tipo y ≥ , es decir:	$y \geq f(x)$
Tipo y ≤ , es decir:	$y \leq f(x)$

y

Tipo x > , es decir:	$x > f(y)$
Tipo x < , es decir:	$x < f(y)$
Tipo x ≥ , es decir:	$x \geq f(y)$
Tipo x ≤ , es decir:	$x \leq f(y)$

(Para ver la imagen de arriba, la opción del menú **Tipo y =** ha de estar abierta)



6.2 El editor de funciones (Hojas de trabajo)

Las funciones a graficar se introducen en el editor de funciones, que aparece en el menú **Gráfico** como hojas de trabajo (Hoja1, Hoja2,...Hoja5). En cada hoja de trabajo pueden introducirse hasta 20 funciones, curvas, o bien superficies de diversos tipos, descritas mediante desigualdades. Las entradas anteriores de la hoja de trabajo pueden eliminarse desde **Edit**, opción del menú **Borrar todo**.

El editor abierto espera la introducción de la primera función, siendo posibles hasta cien entradas. Como ejemplo se ha entrado arriba la función **sin(x)**, ya que, después de colocar el cursor en el sitio correcto, podemos empezar a

teclea libremente (desde el teclado virtual). Después de teclear , el editor espera la introducción de la siguiente función.

Los límites del área gráfica (ventana de visualización en el plano x - y) se fijan en el menú **Preferencias**, opción **Ventana vis.**). Para ello hay que presionar el icono  de la pantalla.

Además de los límites del área de visualización, aún es posible introducir otras variables:

Escala x y **Escala y** determinan los respectivos escalados de los ejes; **Punto x** y **Punto y** describen la resolución en píxeles de los gráficos que se trazarán; cuanto más pequeños, más exactos (zoom de aproximación, de manera que la resolución viene determinada por el límite del área y también al revés: un cambio en la resolución corrige los límites del área automáticamente).

Después, la selección de la opción , **Gráfico** o la pulsación sobre el **icono de Gráfico**  llevan a la imagen de la curva de la función seno mencionada anteriormente.

Como ejemplo de representación de varias funciones sobre una hoja de curva elegimos el polinomio de aproximación de **Taylor** de primer, tercer y quinto grado para la función seno:

(Las marcas a la izquierda junto a las fórmulas significan que esas funciones están activadas, es decir serán representadas. Se pueden desactivar pulsándolas).

Antes de un nuevo dibujo se vuelven a ajustar adecuadamente los límites del área de la ventana de visualización.

Al elegir **Gráfico** se dibujan las funciones:

Las listas del menú del editor de fórmulas o de la pantalla de gráficos contienen múltiples posibilidades de trabajar la representación gráfica.

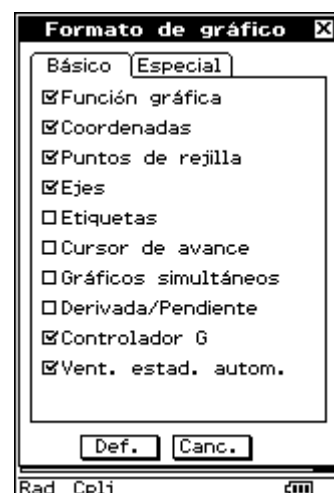
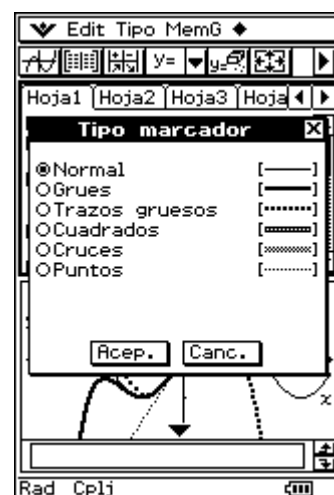
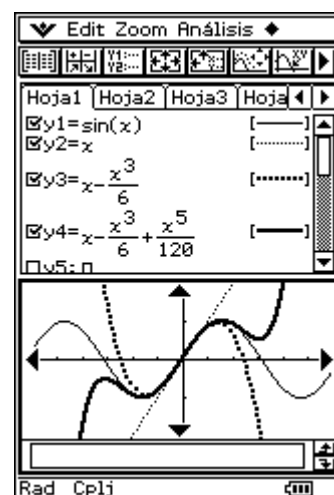
Aquí debe proponerse sólo una pequeña elección (se hallará más información al respecto en el manual de instrucciones).

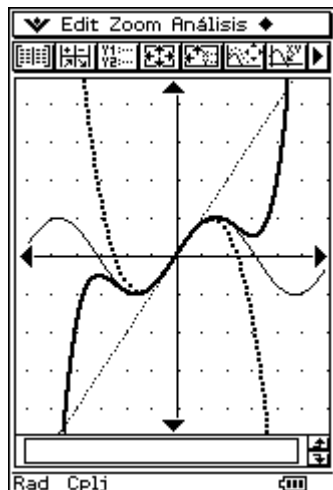
Para una función introducida en el editor de funciones (hoja de trabajo) puede, por tanto, elegirse y configurarse el formato gráfico (**Tipo marcador**). Para ello debe pulsarse sobre el tipo gráfico entre corchetes, a la derecha del término de la fórmula introducido, por ejemplo $[.....]$:

Se abre una ventana de diálogo con seis opciones.

La representación de los **Puntos de rejilla** se activa mediante el menú , **Preferencias [Formato]**, submenú **[Formato de gráfico]**, el cual se encuentra arriba a la izquierda, en la cabecera de la ventana de trabajo.

A modo de ejemplo, activamos la opción **Puntos de rejilla** para así obtener una representación de los puntos de la parrilla, cuyas distancias corresponden a las preferencias de **Escala x** y **Escala y** en el menú **Ventana vis.**





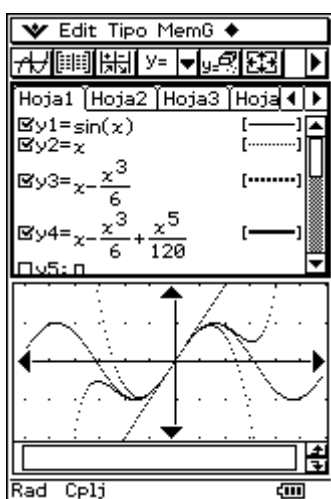
6.3 Partición de la pantalla de trabajo

Para representar fórmulas e imágenes de curvas simultánea o separadamente se puede dividir la pantalla en una o dos zonas:

se pulsa bajo la pantalla sobre **Resize**  para cambiar la división en zonas, y a su vez sobre **Swap**  para alternar entre éstas.

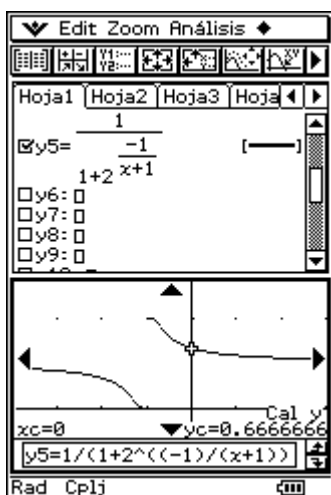
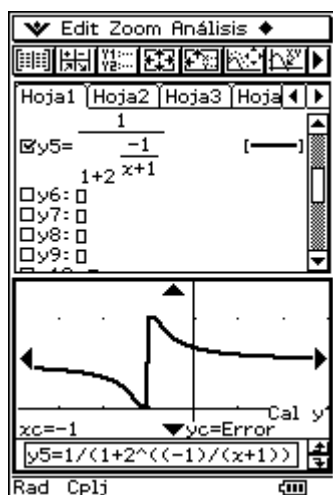
Pista para iniciados

Las curvas pueden trazarse tanto píxel a píxel como “continuas”. Si se configura en el menú *Formato de Gráfico* el tipo de dibujo **Marcación de puntos**, aparece el gráfico solamente como curva continua, y resta sin efecto el *Tipo Marcador* (por ejemplo Tipo de línea gruesa). Si se configura en *Formato de Gráfico*, pestaña *Especial*, el *Tipo de Dibujo Conectar*, se unen los píxels en una curva.



Sugerencia importante

Con el tipo de dibujo **Conectar** pueden producirse gráficos erróneos cuando la función consiste en varias ramas de curva, como muestran las imágenes adyacentes:



$$y = f(x) = 1 / (1 + 2^{(-1 / (x + 1))})$$

En $x = -1$ la función no está definida, presentando una discontinuidad de salto, de altura 1. La función tiene en todas partes un decrecimiento estrictamente monótono y es inyectiva. ¡El gráfico en trazo continuo y grueso es incorrecto!

6.4 Escalado logarítmico

(logaritmo decimal)

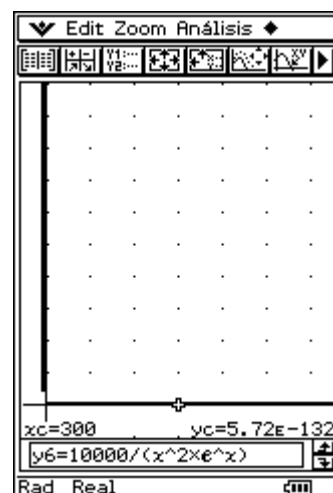
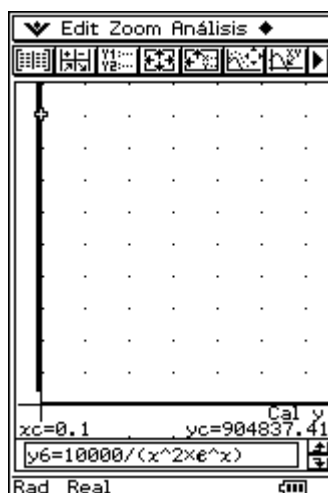
Las funciones con crecimiento extremo (o caídas extremas) no se representan bien en la ventana de visualización con un escalado normal:

Ejemplo

El trazado en forma de L de

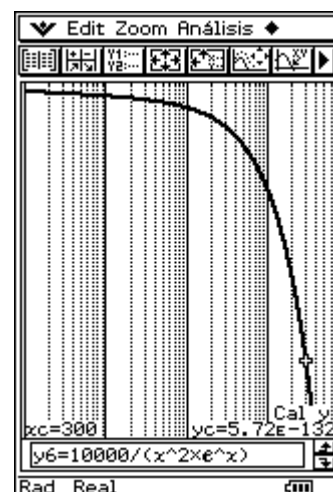
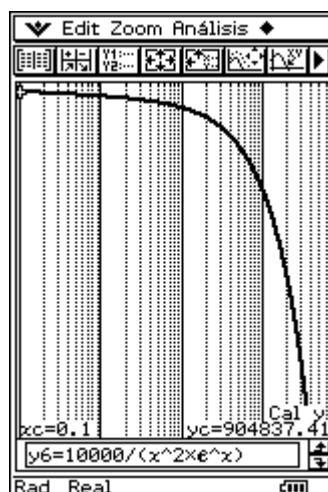
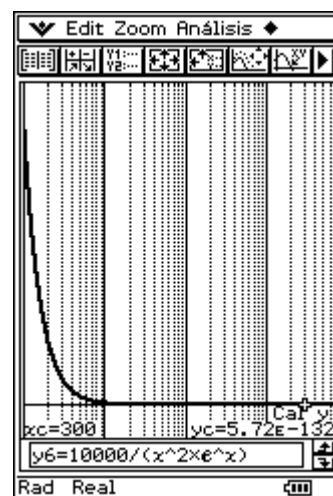
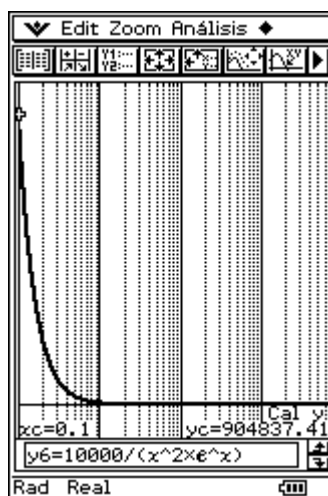
$$y = f(x) = 10000 x^{-2} e^{-x}$$

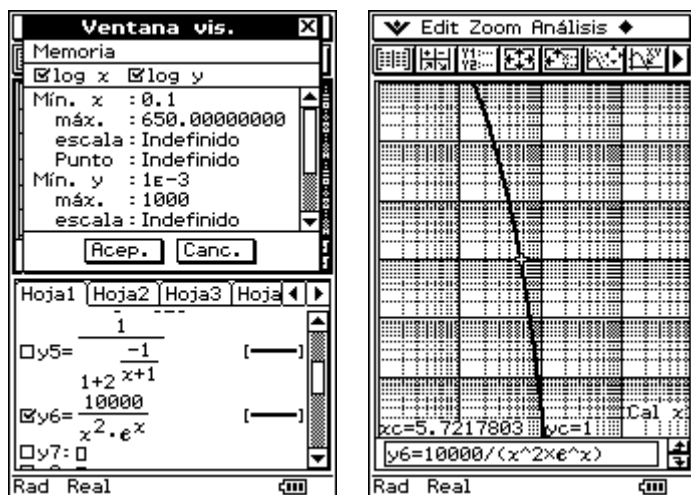
¡El gráfico no discurre ni vertical ni horizontal!



La escala logarítmica del eje de las x expande especialmente zonas próximas al cero:

Se distinguen muy bien los intervalos de x $[10^{-1}, 10^0]$, $[10^0, 10^1]$, $[10^1, 10^2]$, $[10^2, 10^3]$.





La doble escala logarítmica clarifica la fuerte caída exponencial de la función para el valor x , y muestra un trazado cóncavo ¡que en realidad es convexo!

El trozo de curva ampliado permite ahora distinguir el escalado logarítmico del eje y . Como antes, los valores de y pequeños resultan especialmente expandidos, y los grandes, comprimidos:

$[10^{-3}, 10^{-2}]$, $[10^{-2}, 10^{-1}]$, $[10^{-1}, 10^0]$,

$[10^0, 10^1]$, $[10^1, 10^2]$, $[10^2, 10^3]$.

6.5 Ejemplo práctico de aplicación de la regresión potencial y de la representación 2D en la ventana de visualización escalada logarítmicamente

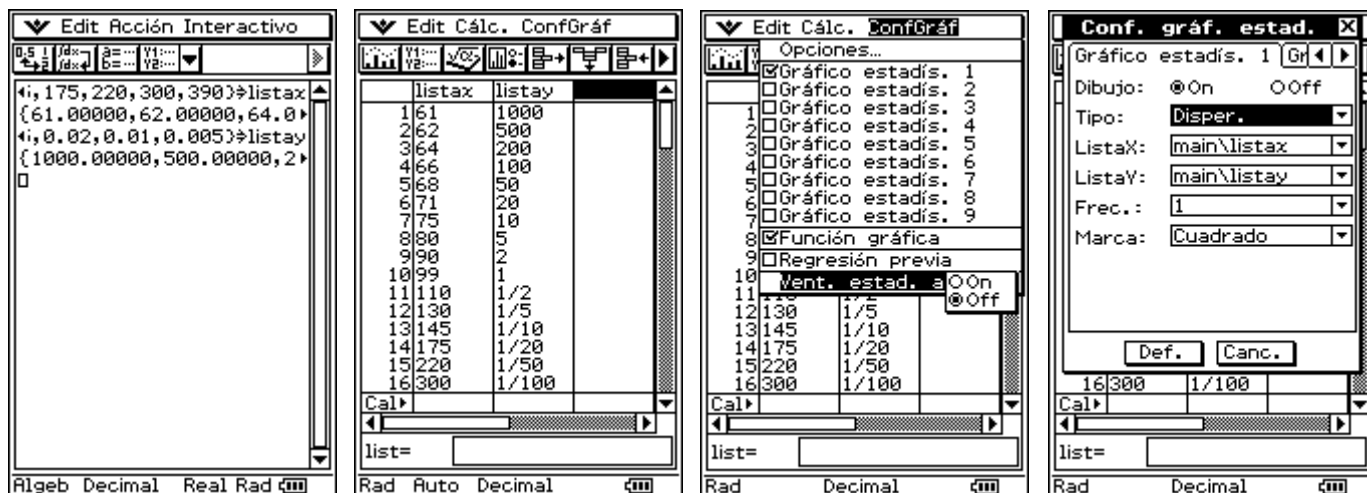
Un interruptor de seguridad eléctrico tiene la propiedad, en caso de cortocircuito (intensidad de corriente mayor, medida en amperios), de reaccionar muy rápidamente (reacción en milisegundos). En el laboratorio se midieron los siguientes pares de datos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 17$, que se muestran en las listas adjuntas:

Lista $x = \{61, 62, 64, 66, 68, 71, 75, 80, 90, 99, 110, 130, 145, 175, 220, 300, 390\}$

y

Lista $y = \{1000, 500, 200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.005\}$.

Los puntos deben ser graficados en un gráfico bidimensional (Scatterplot). Después hay que realizar una regresión potencial. La función de regresión (“curva característica” del interruptor de seguridad) tiene un trazado en forma de **L** y, por lo tanto, debe representarse en escala logarítmica.

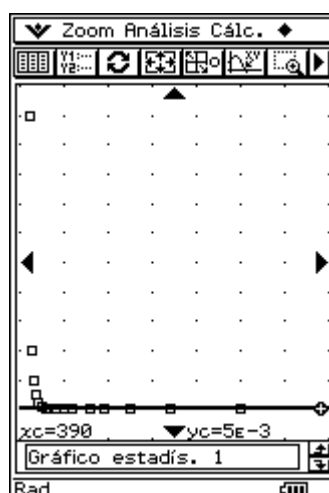


Las listas son almacenadas en el **Menú Principal** y después observadas en el **Editor de listas** del menú **Estadística**.

En el menú **Estadística** se configuran finalmente la ventana de visualización y la gráfica estadística **Statgraph1**.

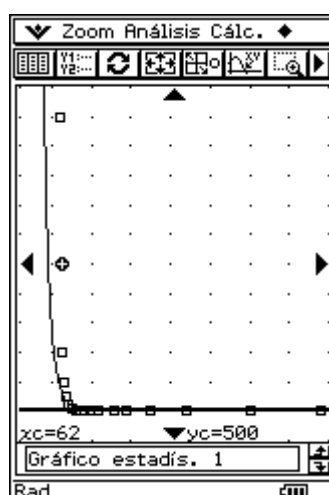
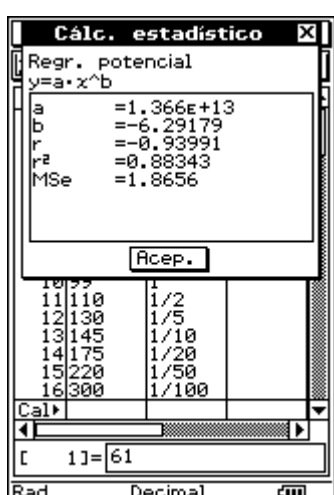
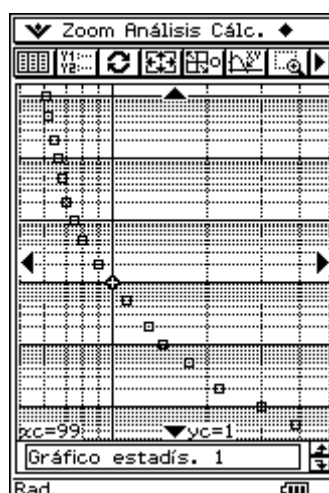
Los puntos adoptan posiciones **formando una L** en la ventana de visualización con escalado normal.

En la ventana de visualización con escalado doblemente logarítmico, los puntos adoptan una posición mejor, más visible.



Pista para iniciados

La regresión potencial se implementa en la ClassPad 300 como regresión cuasilineal, es decir que la expresión potencial $y = a \cdot x^b$ viene determinada por los datos logaritmizados y por la transformación $\log(y) = \log(a) + b \cdot \log(x)$

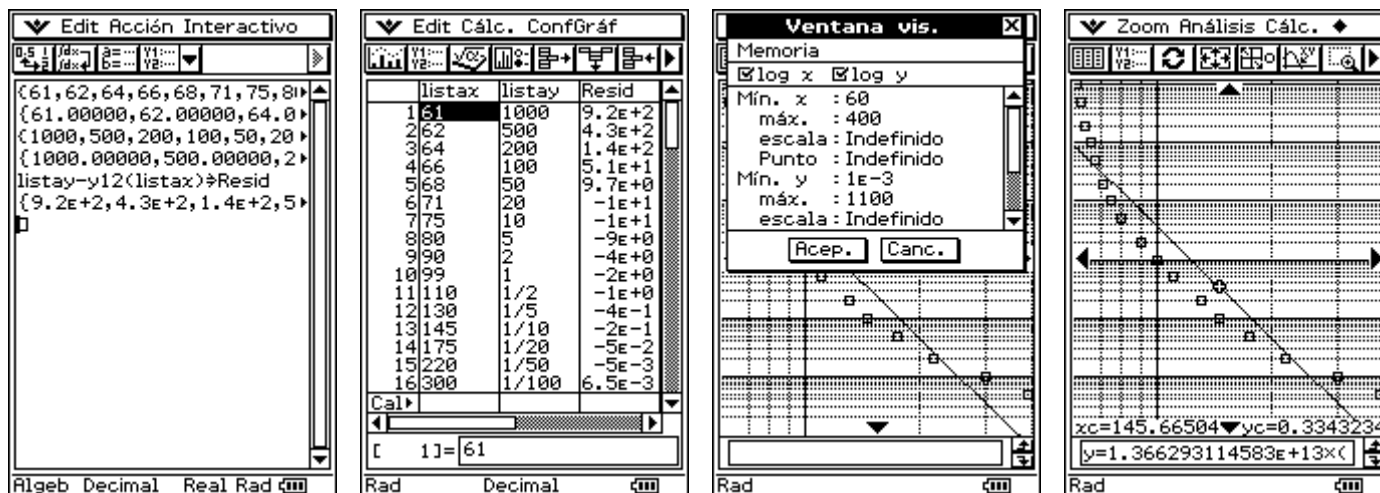


La regresión potencial da como resultado la función $y = 1.366E+13 \cdot x^{-6.29179}$.

La última pantalla representada muestra, como mínimo en la parte izquierda de la función de regresión, que los puntos se sitúan junto a la curva, a su derecha (es decir los valores de la función resultan significativamente menores que los valores empíricos y), resultando inexacta de esta manera la regresión potencial.

Un vistazo a la ventana de visualización escalada logaritmicamente nos conduce a la certidumbre de que la curvatura de la nube de puntos resulta significativamente menor que la de la función de regresión potencial, la cual ahora nos aparece sin curvatura, como una línea recta. También aporta claridad la observación de los residuos $y_i - y(x_i)$.

A partir de aquí debe buscarse una función de regresión mejorada, que alcance la curvatura de los puntos en el intervalo de x observado.



Pista para iniciados

Para conseguir una mejor adaptación a los pares de datos, debe realizarse ahora una nueva regresión potencial con los pares de datos transformados (logaritmizados) en $\text{loglist} = \log(\text{listax})$ y $\text{logylist} = \log(\text{listay}) + 3$ y almacenarlos en $y13(\lg(x)) = a \cdot (\lg(x))^b$.

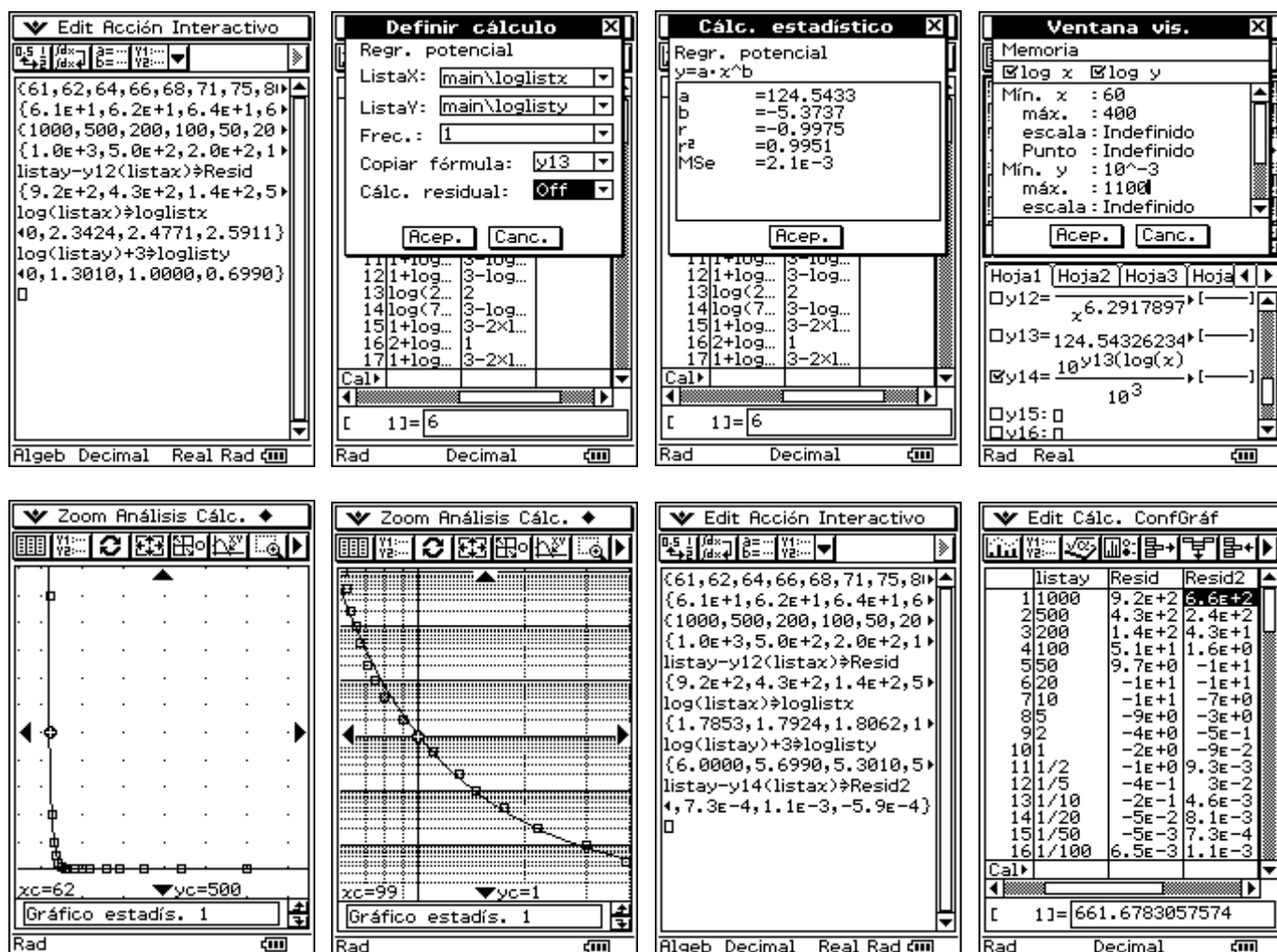
La regresión potencial requiere datos positivos, por lo cual se transforma añadiéndole +3.

Así la transformación contraria se produce en $y=y14$, es decir $\lg(y14)=y13(\lg(x))-3$.

$\lg(y) + 3 = y13(\lg(x)) = a \cdot (\lg(x))^b$ es la función de regresión encontrada de los pares de datos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, 17$, ya que $y13 = a \cdot (\lg(x))^b$ era el resultado para los pares de datos originalmente transformados $(\lg x_i, \lg y_i + 3)$.

De esta manera hemos encontrado la función de regresión con una mayor curvatura y mejor adaptada.

$$y(x) = 10^{(a \cdot (\lg x)^b - 3)} = 10^{(124.543 \cdot (\lg x)^{-5.37365})} / 10^3.$$



Tanto los gráficos como la lista de residuos muestran una clara mejora de la regresión no lineal en la zona x observada.

Con este ejemplo, para el análisis de la curva típica, resulta claro que la representación gráfica con escala logarítmica, a simple vista, resulta más adecuada que la representación de los ejes con escalado equidistante.

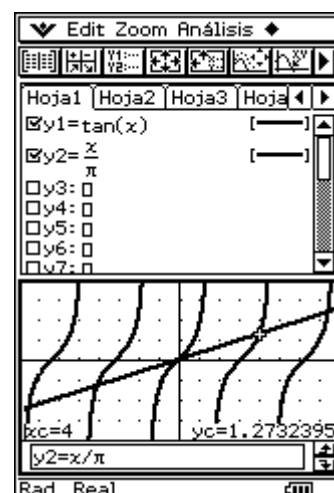
6.6 Intersección entre dos gráficos

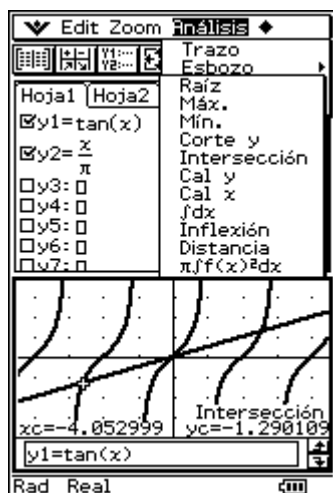
Las ecuaciones que no se resuelven explícitamente para la incógnita x se escriben a menudo en la forma

$$g(x) = h(x), \text{ por ejemplo } \tan(x) = x/\pi.$$

La solución gráfica consiste en trazar ambas funciones y leer las coordenadas x de los puntos de intersección.

Para ello, en la hoja de trabajo (Editor-Y) en el menú Gráficos y Tablas se introducen ambos términos de la ecuación, y a continuación se representan gráficamente.





A través del menú **Análisis (Trazo)** de la línea de cabecera se invoca un cursor con la forma de cruz y que parpadea en el centro de la pantalla. Con las teclas de cursor (hacia arriba/hacia abajo) se posiciona el cursor sobre el gráfico correspondiente. Con las teclas del cursor (hacia la izquierda/hacia la derecha) se mueve éste sobre el gráfico elegido. La fórmula del gráfico aparece abajo, en el campo de mensaje, y las coordenadas del cursor se insertan en el borde inferior de la imagen.

En la imagen de arriba el cursor está posicionado sobre la línea recta (gráfico y2), lo cual tiene mucho sentido en este caso, ya que las ramas de la curva del otro gráfico desaparecen en los bordes inferior y superior de la imagen. Si se mueve el cursor a un punto de intersección entre los gráficos, el valor de x representado abajo resulta ser una solución de la ecuación. De todas formas, la exactitud de esa solución es, en gran medida, dependiente del tamaño de la sección de la pantalla, así como de la configuración en **xdot**. Un valor **xdot = 0.1** significa, por ejemplo, que entre dos píxels el valor de x crece aproximadamente 0.1; véase el manual de instrucciones página 3-2-1: *Configuración de los parámetros de la ventana de visualización para la ventana gráfica*.

Si la imagen de la curva es comprimida debido a la bipartición de la pantalla, empeora la exactitud relativa de la visualización.

Aquí el menú **Análisis (Resolución G: Intersección)** resulta ser una ayuda para la exploración de la representación gráfica. Con la ayuda de la opción **Intersección** (determinación del punto de intersección) es posible una determinación exacta del punto de intersección de dos curvas en la pantalla gráfica.

Ese procedimiento está, pues, previsto en la ClassPad 300, y discurre como sigue: En la hoja de trabajo se seleccionan las dos curvas que se cruzan y se representan gráficamente.

En la ventana gráfica activa se selecciona el menú **Análisis**, submenú **Resolución G**, y allí se pulsa la opción **Intersección**. El punto de intersección más lejano de la izquierda es calculado y visualizado. Con las teclas del cursor (hacia la derecha/hacia la izquierda) pueden ser determinados y visualizados otros puntos de intersección.

Los valores exactos de las coordenadas de los puntos de intersección son visualizados abajo, en la línea inferior.

(Más información en el manual, página 3-8-4)

6.7 Curvas en representación paramétrica.

Las funciones, o más exactamente las curvas, en representación paramétrica tienen la forma $x = g(t)$, $y = h(t)$.

$$x = a \cdot \cos(t), \quad y = b \cdot \sin(t)$$

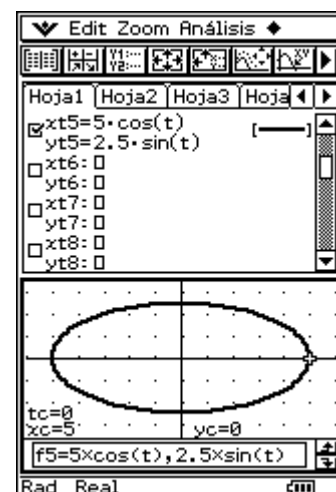
es, por ejemplo, la representación paramétrica de una elipse con semiejes a y b :

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

(ecuación de curva no paramétrica en coordenadas cartesianas)

Para graficar una curva así, la línea **y10** de la hoja de trabajo se cambia en el menú **Tipo** a **Tipo de Parámetro**. Así queda el editor de funciones listo para la entrada de una representación de curva con x e y dependientes de t . Al hacerlo, son introducidas de forma separada las funciones para x y para y respectivamente. En la imagen ya se ha producido una entrada de la antes citada elipse con $a = 5$ y $b = 2,5$.

En el menú de la ventana de visualización se preconfigura el rango de las variables t a $t_{\min} = 0$, $t_{\max} = 2\pi$, y el paso Δt a $\pi/24$, que corresponde exactamente a $7,5^\circ$. El rango x - y ha sido adecuado correspondientemente a la elipse introducida. **Gráfico** conduce al trazado de la elipse.



Hipérbola “derecha-izquierda” con una rama de curva derecha y una izquierda:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \text{ (Ecuación de la curva en coordenadas cartesianas)}$$

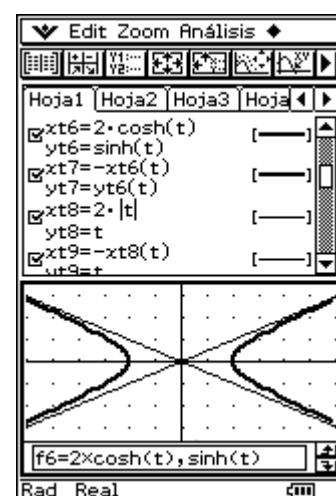
Representación paramétrica: $x = a \cdot \cosh(t)$, $y = b \cdot \sinh(t)$

Las funciones hiperbólicas se encuentran en el submenú **hyp** del menú **mtb** del teclado virtual. De todas formas, se pueden también elegir la funciones “normales” **sin()**, etc. y añadir la “**h**” con ayuda del teclado.

Las asíntotas tienen las representaciones paramétricas

$$\begin{aligned} y &= b \cdot t, \quad x = a \cdot |t| && \text{para la rama derecha y} \\ y &= b \cdot t, \quad x = -a \cdot |t| && \text{para la rama izquierda de la curva.} \end{aligned}$$

Son introducidas en la hoja de trabajo como octava y novena función donde $|t|$ también podía ser introducida como raíz de t^2 . Como valores concretos para a y b se utilizan respectivamente 2 y 1.



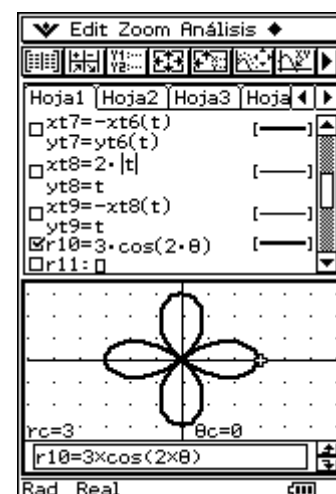
6.8 Curvas en representación de coordenadas polares

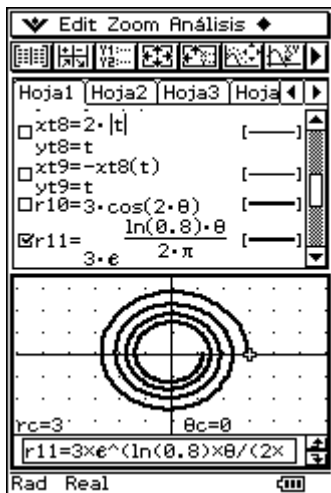
Las curvas en representación de coordenadas polares tienen la forma $r = f(\theta)$.

Ejemplo $r = a \cdot \cos(2\theta)$ (“Trébol de la suerte”)

Para poder introducir una función como ésta, se activa en la hoja de trabajo en el menú **Tipo** el **Tipo r**. Después, la ventana de entrada del **Editor de Funciones** espera una (o varias) función(es) del tipo $r = r(\theta)$ en la forma reproducida a la derecha.

Como ejemplo se ha introducido aquí la “Hoja del trébol de la suerte” con $a = 3$.





En el rango de entrada de la ventana de visualización, el rango de las variables está preconfigurado a $\theta_{\min} = 0$, $\theta_{\max} = 2\pi$; el paso $\Delta\theta$ a $\pi/24$. Los rangos de x e y se adecuan a la tarea correspondiente.

Gráfico produce la curva representada a la derecha.

Otro ejemplo podría ser la espiral-exponencial:

$$r = r(\theta) = a \cdot e^{(b \cdot \theta)}.$$

Elija b de manera que el radio decrezca aproximadamente un 20 % cada vuelta: $b = \ln(0.8) / (2\pi)$

Asigne a a el valor 3 y ajuste la ventana de visualización del problema:

$0 \leq \theta \leq 8\pi$ (cuatro rotaciones). La pantalla está aquí dividida, para visualizar simultáneamente la hoja de trabajo y la ventana de gráficos.

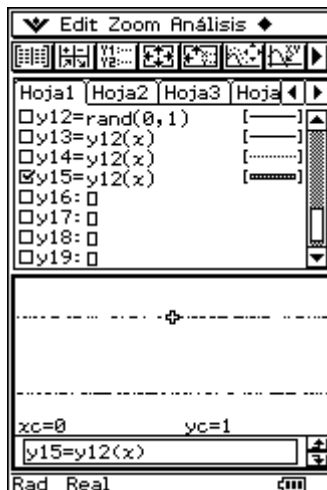
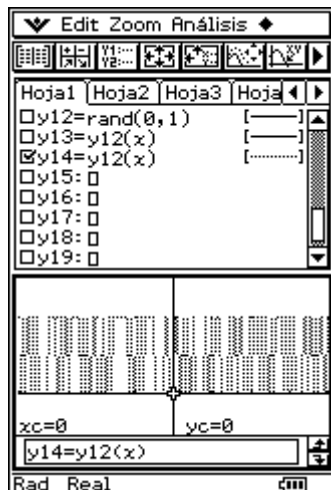
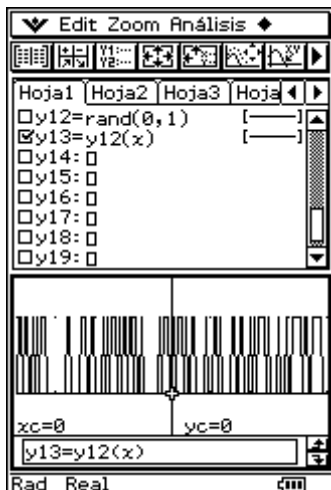
6.9 Funciones estocásticas

(Trayectorias de un proceso aleatorio)

Ejemplo

La representación de la función estocástica $y = f(x) = \text{rand}(0,1)$, donde, para cada argumento x , se “sortea” un nuevo número estocástico 0 ó 1. Para ello, primeramente debe establecerse la función como **rand(0,1)**, y ser invocada repetidamente:

definir $y12(x) = \text{rand}(0,1)$ y después dibujar $y13(x) = y12(x)$, de manera que $y12(x)$ sea repetidamente invocada.



Los gráficos estocásticos se pueden visualizar en tres representaciones diferentes:

- primero en el **Formato de Gráfico**, pestaña **Especial**, **Tipo de dibujo: Conectar** y **Tipo marcador: Normal** (Línea),
- también en el **Formato de Gráfico**, pestaña **Especial**, **Tipo de dibujo: Conectar** y **Tipo marcador: (Puntos)**
- y finalmente en el **Formato de Gráfico**, pestaña **Especial**, **Tipo de dibujo: Marcación de puntos** (sólo píxels calculados).

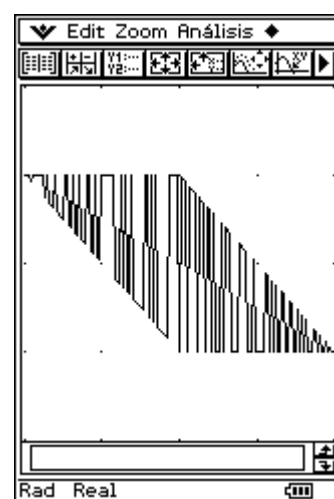
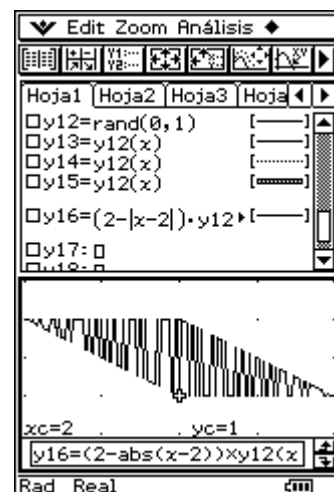
6.10 Representación de una superficie 2D con sombreado aleatorio

El siguiente ejemplo deja claras posibilidades gráficas adicionales de la ClassPad 300. Un área en forma de paralelogramo debe ser rellenada con un sombreado aleatorio. Para ello necesitamos la especificación de función $y_{12}(x) = \text{rand}(0,1)$, y entonces definimos

$$y_{16}(x) = y_{12}(x) * (2 - |x - 2|) + 2 + (|x - 2| - x) / 2 \text{ con } 0 \leq x \leq 4$$

de manera que $y_{12}(x)$ debe ser invocada repetidamente.

Ventana de visualización: $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 4$



6.11 Representación de una señal periódica con "Tiempos de pausa"

Finalmente, dibujamos una función que está sólo definida por trozos:

$$y = y_{17}(x) = \ln(\cos(x)) / \ln(\cos(x))$$

Esta función sólo está definida cuando rige $0 < \cos(x) < 1$.

El recorrido de esta función consiste en el número $y = 1$.

Para poder comparar se dibuja la función $\cos(x)$.

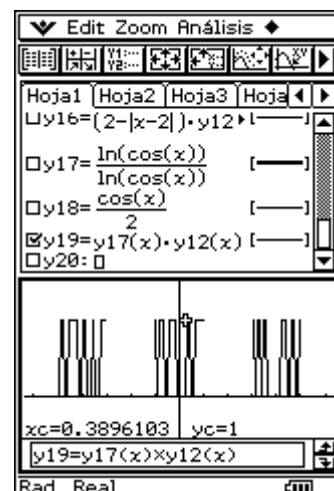
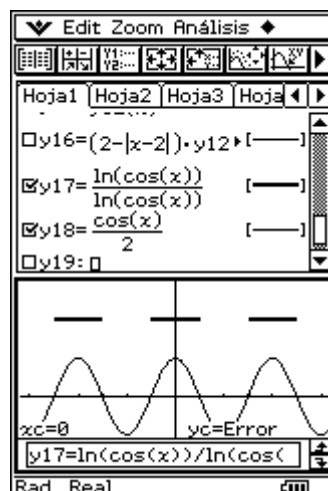
La segunda imagen muestra una señal estocástica con tiempos de pausa, y se origina en las fórmulas

$$y_{12} = \text{rand}(0,1)$$

y

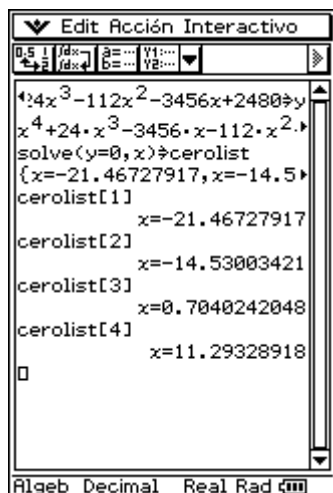
$$y_{19} = y_{17}(x) * y_{12}(x).$$

De esa manera se producen los siguientes gráficos:



7 Discusión de curvas para una función $y = f(x)$

¿Cómo determinar los puntos de inflexión sin necesidad de un cálculo laborioso?



A modo de ejemplo se discutirá y se representará gráficamente la siguiente función polinómica:

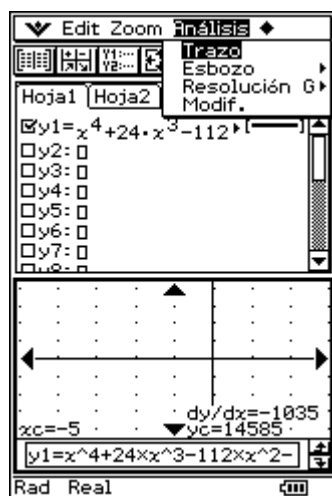
$$y = f(x) = x^4 + 24x^3 - 112x^2 - 3456x + 2480, \quad -\infty < x < \infty$$

7.1 Ceros

En primer lugar se determinan los **ceros** (raíces) de la función en el menú principal mediante la orden **solve(...)**. De este modo cobra sentido la siguiente ventana de visualización

– $25 \leq x \leq 15$ y, de momento, $-10 \leq y \leq 10$.

La representación gráfica en el menú Gráficos & T... no muestra ningún gráfico de la función aunque en la ventana de visualización hay cuatro ceros reales simples. La razón de esto la veremos a continuación.

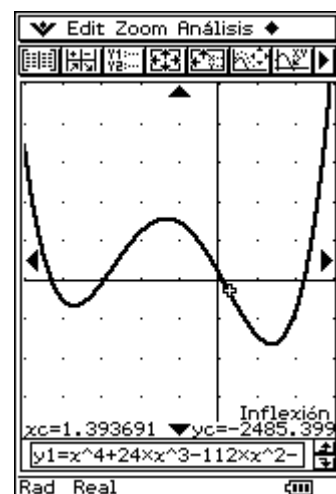
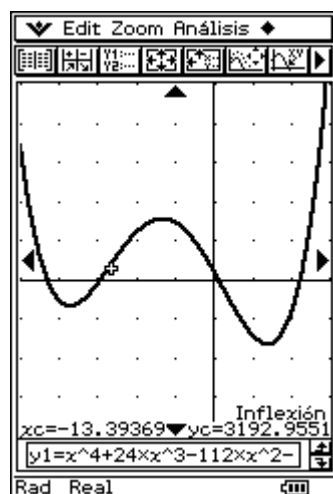
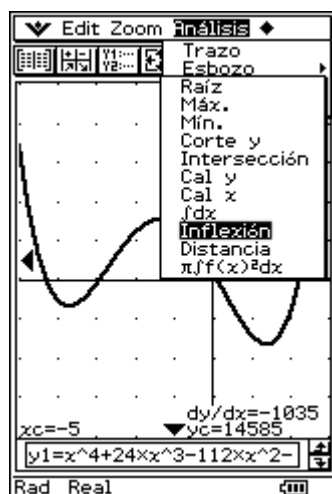
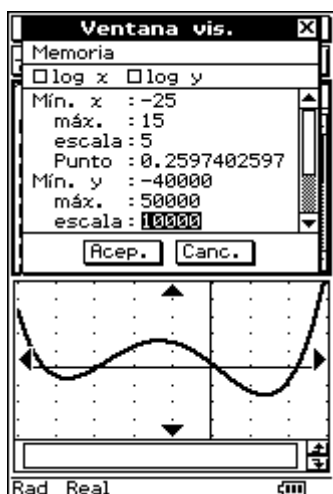


Resiguiendo la función con el cursor, vemos claramente que el trazado de la curva se mueve casi en vertical a través de los ceros, y aparecen en las inmediaciones valores de la función por encima de 10000.

Por ello, el rango de las y en la ventana de visualización está configurado demasiado pequeño.

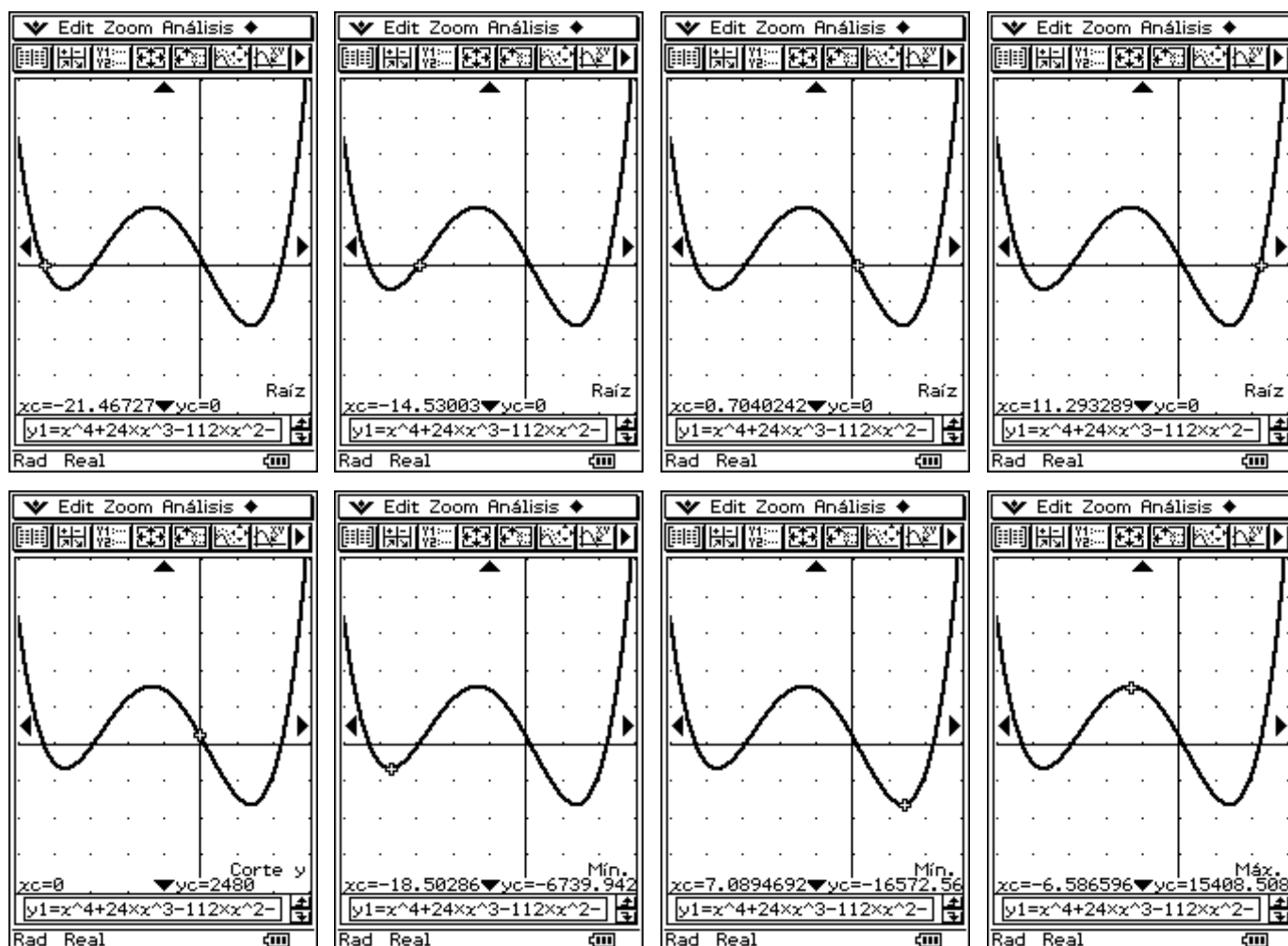
Para abarcar el trazado fundamental de la curva, se ha de configurar el rango de las y , por ejemplo como sigue:

– $-25000 \leq y \leq 45000$.



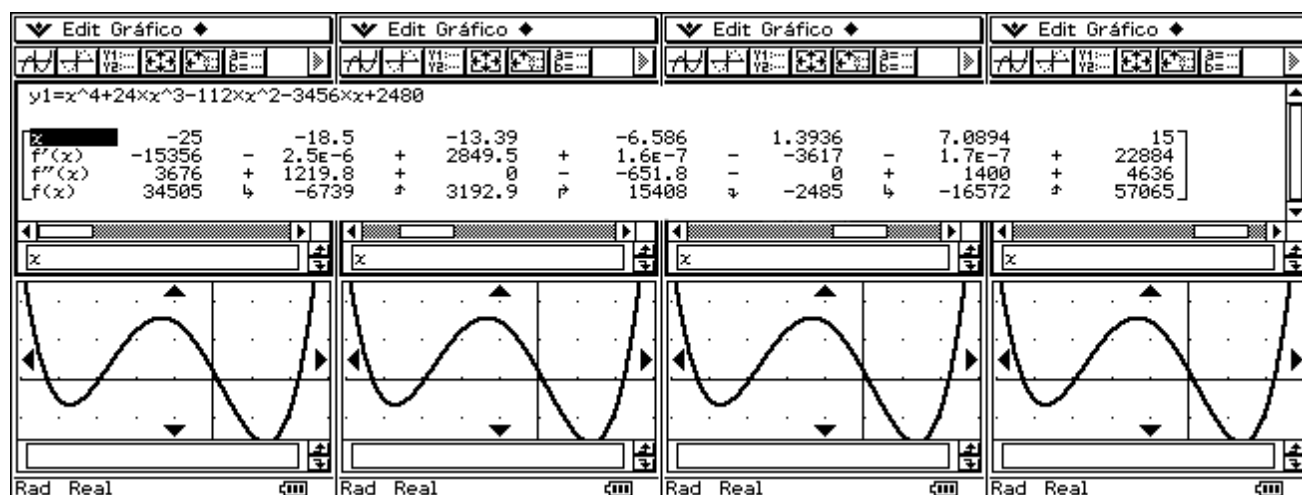
El submenú “Solución gráfica” ofrece la posibilidad de la discusión de curvas.

Las siguientes imágenes muestran los ceros (raíces), así como los extremos locales (máximos y mínimos) y el punto de intersección con el eje y .



También es posible mostrar los resultados establecidos en la discusión de curvas con una tabla de resultados  (véase Manual, capítulo3)

7.2 Extremos locales y puntos de inflexión



Las entradas en la tabla de resultados son fácilmente comprensibles:

La línea x empieza y termina con la configuración de la ventana de visualización y muestra las coordenadas x de los extremos y de los puntos de inflexión en orden de aparición. La línea $f(x)$ está correspondientemente ordenada. Los signos algebraicos en la primera derivada describen la **Monotonía** (+ creciente, - decreciente); en la segunda derivada, la **Curvatura** (+ convexo, - cóncava).

Pista para iniciados

A veces puede fallar la Discusión de la Curva en la Ventana Gráfica mostrada más arriba y se obtiene el mensaje “¡No se puede resolver!”. Las causas que provocan este mensaje de error pueden ser:

En efecto, no existe ninguna solución en el rango de la ventana de visualización.

O bien:

El algoritmo de búsqueda no puede calcular una solución existente. (Motivo: el procedimiento de solución numérico no converge).

En ese caso se pueden usar las siguientes posibilidades de búsqueda adicionales:

Los puntos de inflexión de una función $y = f(x)$ son los puntos extremos locales de la primera derivada $y' = f'(x)$ y los ceros de la segunda derivada $y'' = f''(x)$. Para encontrarlos es recomendable un análisis de la primera o segunda derivada en la ventana gráfica.

Alternativamente puede usarse el solucionador de ecuaciones numérico para calcular los ceros de la función de salida, es decir de las derivadas (orden *solve(...)*).

El siguiente ejemplo no parece tan difícil a primera vista. La ClassPad 300 demuestra aquí también ser una herramienta útil. Este ejemplo no puede ser analizado “a mano”, sin una herramienta de estas características.

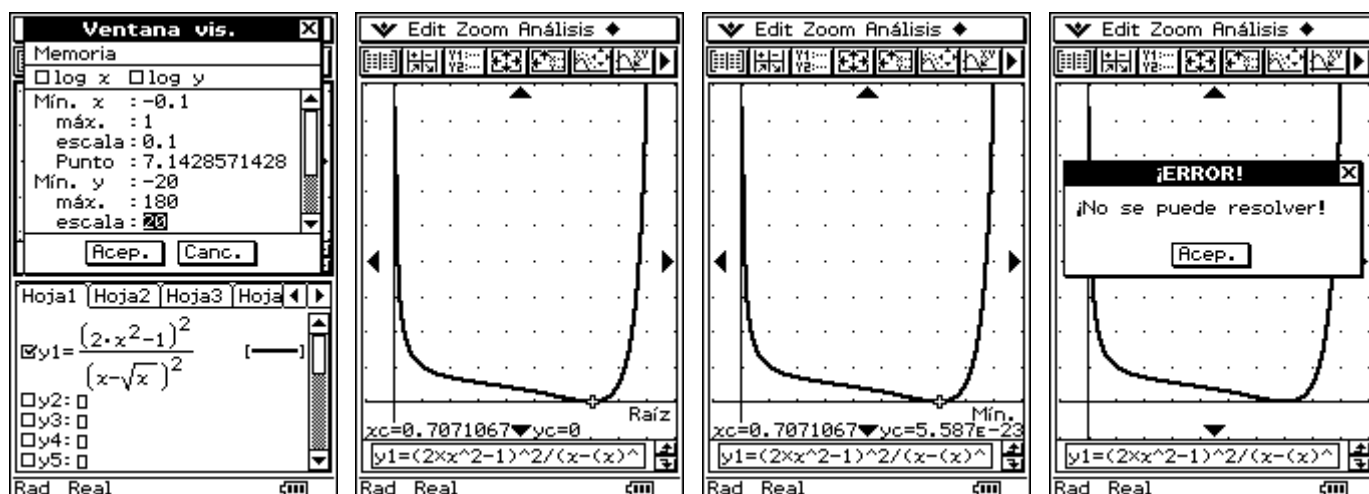
Ejemplo

Analice el trazado gráfico de la rama de curva en el intervalo $0 < x < 1$ para la siguiente función:

$$y = f(x) = (2x^2 - 1)^2 / (x - x^{1/2})^2.$$

A partir de la fórmula se ve enseguida que hay dos valores asíntóticos verticales (polos): $x_{p1} = 0$, $x_{p2} = 1$.

El gráfico de la función discurre en el primer cuadrante a causa de los cuadrados, y en el intervalo de x considerado hay un cero (raíz) de multiplicidad 2: $x_R = (1/2)^{1/2}$. El problema es aparentemente sencillo de resolver.



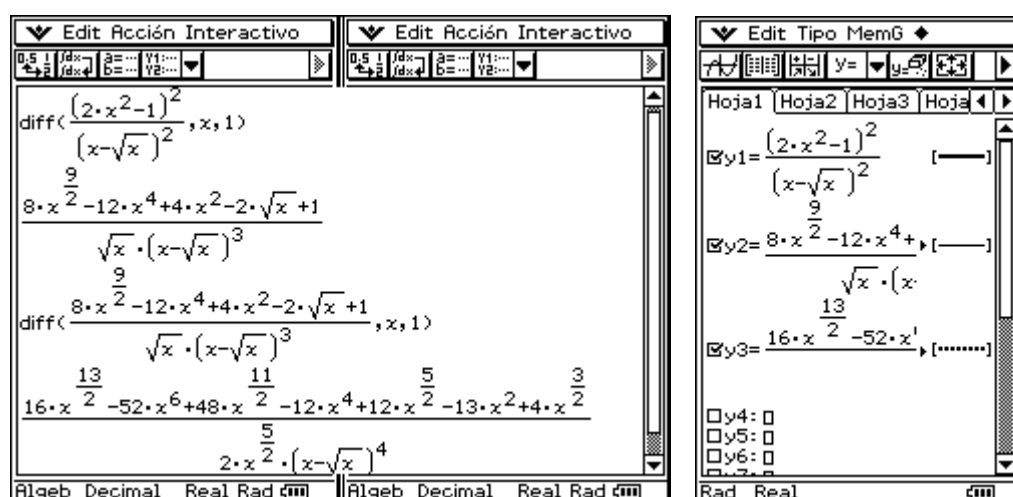
En la ventana gráfica pueden determinarse sin problemas el cero (raíz) y el punto mínimo, con lo cual ya queda claro que se ha calculado en modo decimal. El valor mínimo no da un resultado exacto de 0. No se obtiene solución para el punto de inflexión.

En este momento surge la pregunta:

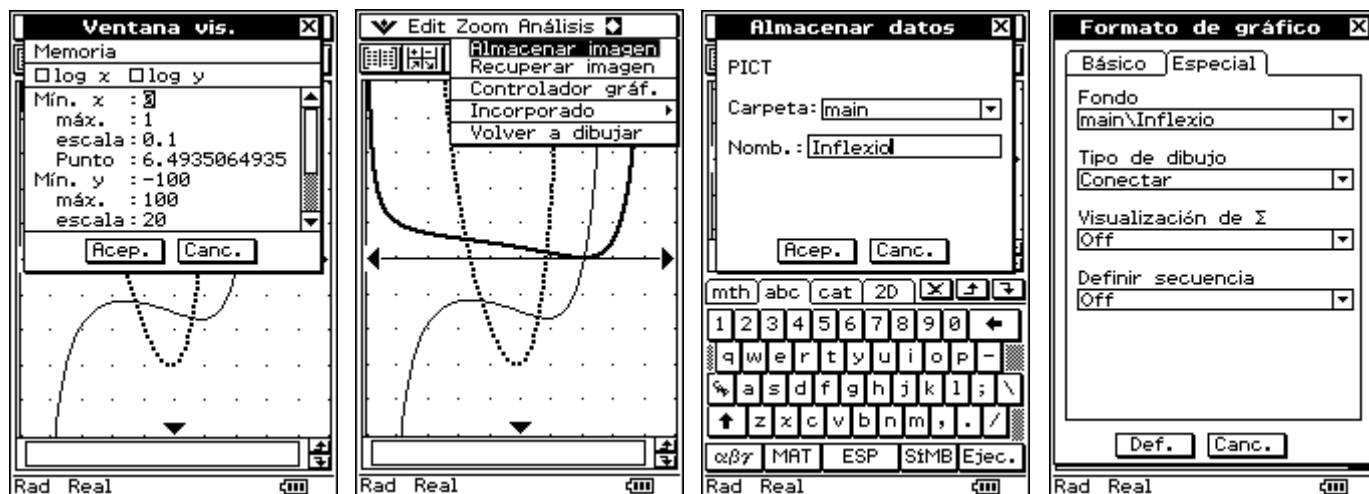
¿Queda ya acabada la discusión de la curva o se ha pasado algo por alto?

Con este ejemplo pueden estimularse el espíritu descubridor y el afán investigador del lector. Incluso un problema aparentemente obvio puede reservar sorpresas ocultas.

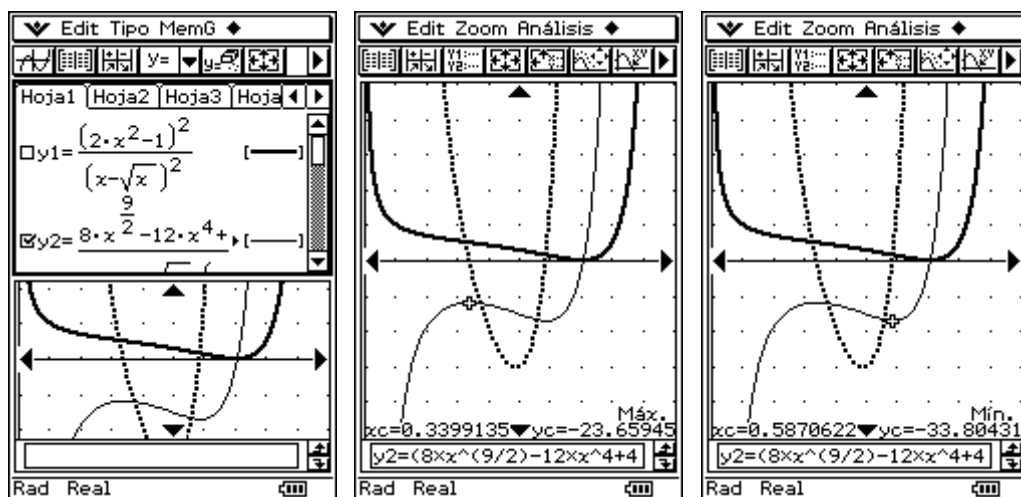
Analizamos la primera y segunda derivadas, y para ello preparamos las fórmulas en el Menú Principal (cálculo simbólico), y después las copiamos en el editor de funciones del menú Gráficos&T...



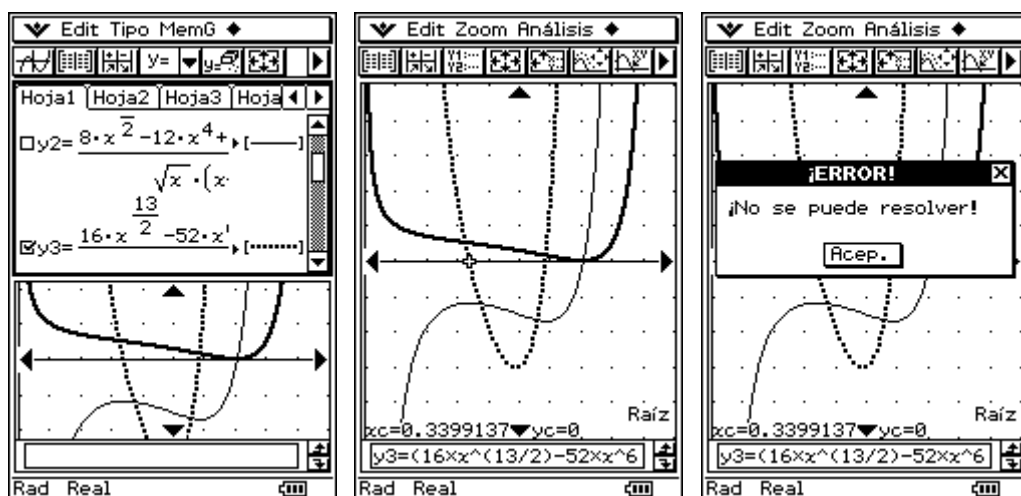
Las tres curvas se almacenan como imagen en segundo plano. Para ello es suficiente que, en posteriores análisis, cada una de las tres funciones sea activada en su momento en el editor gráfico.



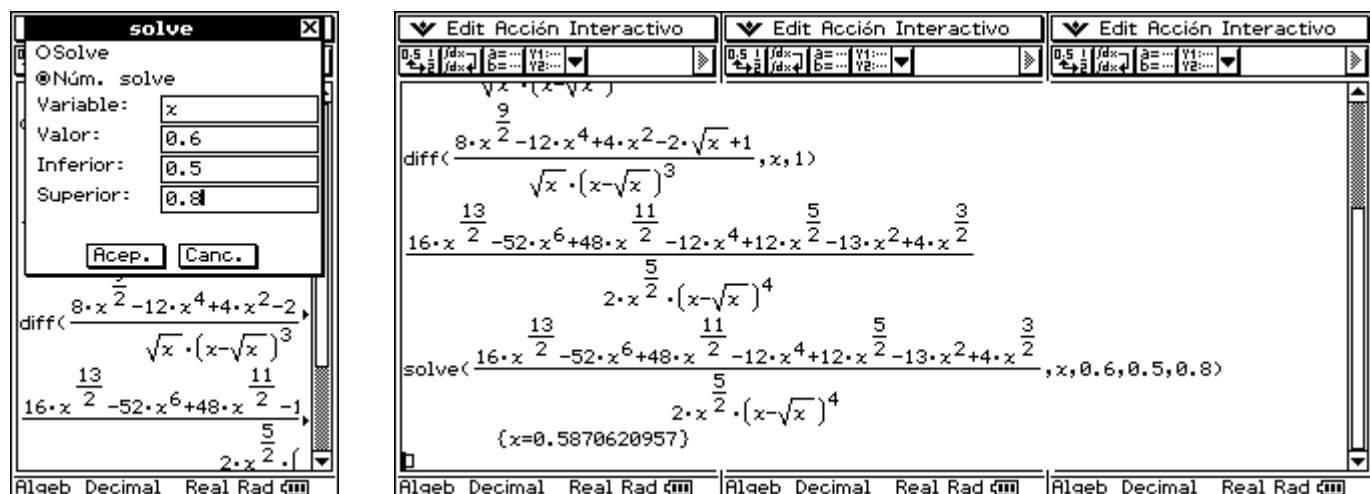
La primera derivada tiene dos extremos locales, es decir la función de salida tiene pues dos puntos de inflexión. Por tanto la segunda derivada posee dos ceros.



El cálculo de los extremos de la primera derivada se produjo de nuevo en la ventana gráfica.



El cálculo de los ceros de la segunda derivada funciona sólo para el cero de la izquierda. El cero de la derecha discurre tan abruptamente que el algoritmo numérico falla de nuevo. La solución se determina en el Menú Principal.



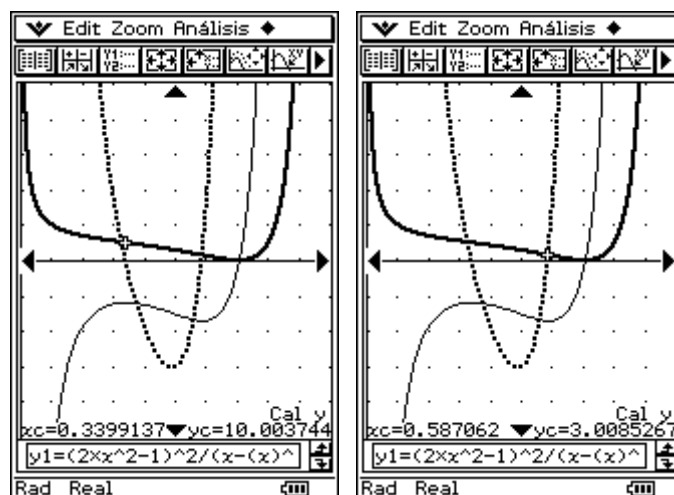
Después de ser introducido el término de la fórmula, éste es marcado y procesado en el Menú Interactivo. La orden **solve(...)** se encuentra en el submenú **Ecuación/Desigualdad**. A partir de aquí, se abre una ventana de entrada, en la cual se introducen un **Valor inicial** (0.6) y los **Límites del intervalo de búsqueda** (Inferior 0.5, Superior 0.8) para el algoritmo de solución numérico.

7.3 Resumen de la Discusión de curvas

La rama de curva analizada en el intervalo $0 < x < 1$ tiene dos puntos de inflexión

$P_{I1}(0.340, 10.004)$ y $P_{I2}(0.587, 3.009)$.

Después de ser determinadas las coordenadas x del punto de inflexión a través de los extremos de la primera derivada, y el cero de la segunda respectivamente, fue calculado finalmente el valor pertinente de y a través de la curva de salida.



Ejercicios

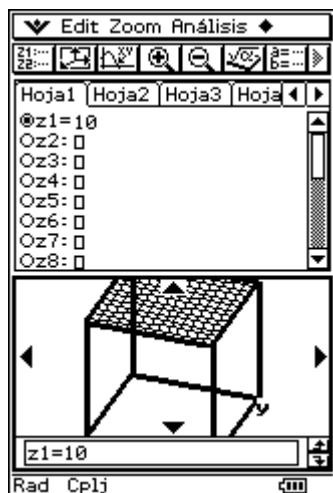
7.1 Analice la siguiente función $y = f(x) = -(8x^4 - 4x^2)/(x^2 - 1)$.

Determine en particular el recorrido de la función y los puntos de inflexión.

8 Representación gráfica de funciones $z = f(x, y)$

(Gráfico 3D)

¿Cómo se obtienen gráficos 3D?

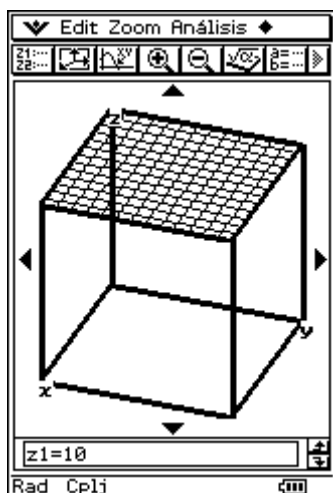


Las funciones de dos variables ($z = f(x, y)$) se visualizan como superficies (curvadas) que se pueden trazar con la ClassPad 300 en una representación con perspectiva.

Para ello se abre en el menú principal de todas las aplicaciones el menú **Gráfico 3D**. En la hoja de trabajo se introducen los términos de la fórmula ($f(x, y)$) que hacen explícita z .

El rango de valores en el eje de las x se subdivide en los intervalos **rejilla x** . Igualmente el rango del eje de las y , en intervalos **rejilla y** .

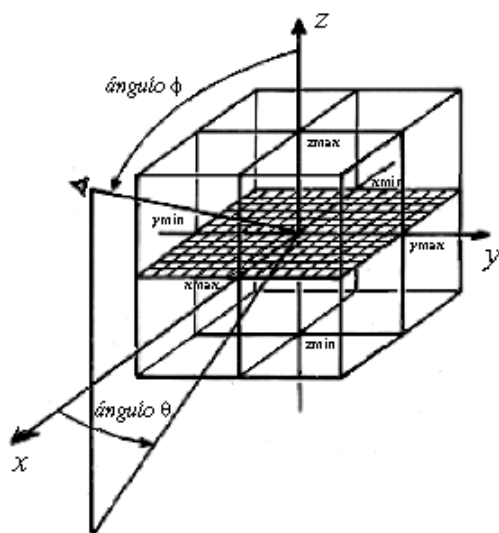
Así pues la función $z = f(x, y)$ es calculada para **rejilla x * rejilla y** : “puntos de rejilla”. Los puntos de rejilla son unidos posteriormente por segmentos de recta. De esta manera se origina una red de líneas (Modelo de alambre, *wireframe model*) como ilustración de la superficie en el espacio.



Intente medir en cada caso de manera exacta el rango de valores sobre el eje de las z .

Los límites del rango de valores **x_{min} , x_{max} , y_{min} , y_{max} , z_{min} , z_{max}** definen el espacio de observación, que será ilustrado tridimensionalmente, geoméricamente, mediante un cuboide. En Configuración (**Formato 3D, Ejes**) es designado **Cuadro**. Seleccionando **Cuadro** en la línea de diálogo **Ejes** del submenú Formato 3D, se hará visible el “cuboide” en todas las imágenes. La línea de visión directa desde la cual será observado el cuboide (espacio original) viene determinada por dos ángulos:

En la pantalla se representa el plano (horizontal) $z = f(x, y) = 10$.



ángulo θ : ángulo de azimuth entre el plano z - x y el plano del observador, que viene determinado por el punto de visualización y el eje z . (Valor por defecto del ángulo $\theta = 20^\circ$)

ángulo ϕ : Ángulo de inclinación entre la línea de unión que va del punto medio del cuboide al punto de visualización, y el eje z . (Valor por defecto del ángulo $\phi = 70^\circ$)

Ambos ángulos se deben dar siempre en DEGREE.

El usuario no tiene ninguna influencia sobre la distancia entre el punto de visualización y el punto medio del cuboide.

La distancia se escala siempre de manera que la imagen de la caja encaje exactamente en la pantalla. La representación puede posteriormente aproximarse o alejarse.

Al seleccionar el menú Gráfico 3D, la ventana de entradas de la hoja de trabajo espera la introducción de una o varias funciones del tipo $z = f(x, y)$.

Aunque se introduzcan varias funciones, sólo es posible elegir y representar gráficamente una.

A modo de ejemplo se ha introducido más arriba la función $z = 10$. La ventana de entrada del editor de la **Ventana de Visualización** muestra, al ser invocada por primera vez, los valores preconfigurados para la perspectiva de visualización y los límites de pantalla. La función $z = 10$ es la tapa del “cuboide” (superficie del techo).

Así pues, **Gráfico** da la imagen en perspectiva del cuboide desde la dirección de visualización por defecto. La superficie del tejado se marca mediante la rejilla predeterminada con **rejilla $x = 14$** y **rejilla $y = 14$** , líneas de rejilla en dirección x e y .

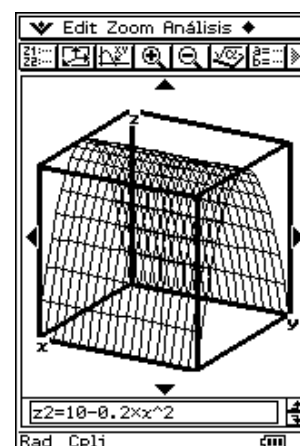
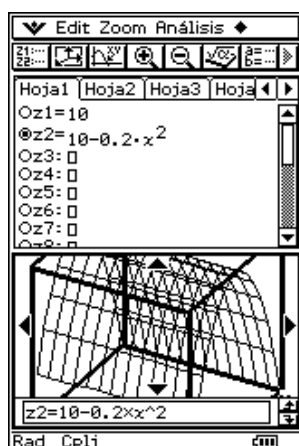
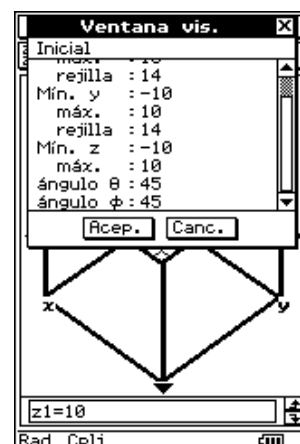
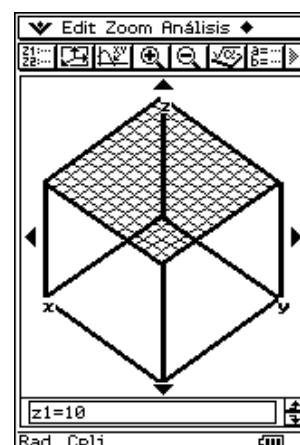
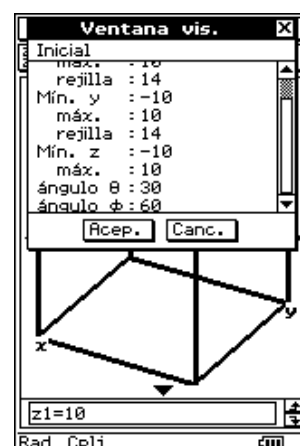
Se ve cómo el cubo de longitud de lado 20 UL (unidades de longitud) queda en esta perspectiva fuertemente deformado con el ajuste a los límites de la pantalla.

Si el cubo está algo cruzado (**ángulo $\theta = 45^\circ$** , **ángulo $\phi = 45^\circ$**), aparece en otra perspectiva.

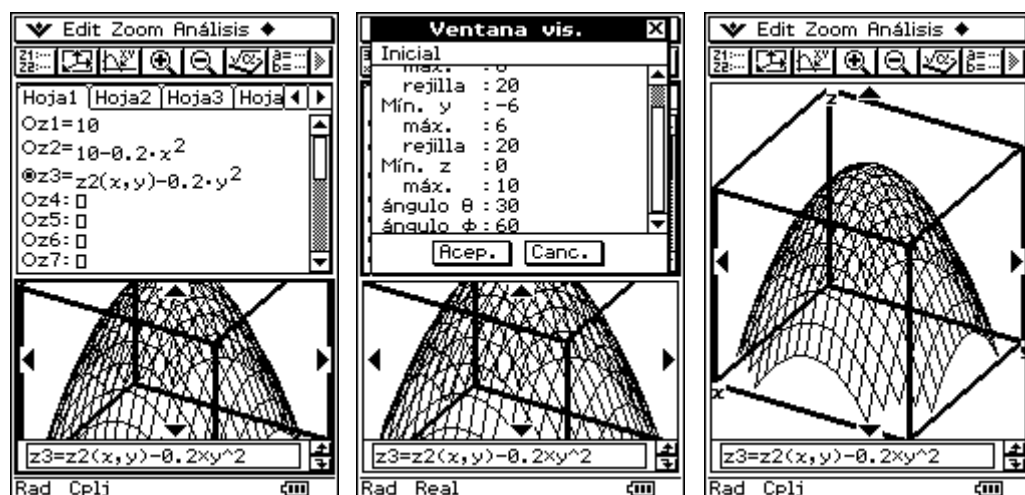
En los ejemplos siguientes, la pantalla se divide de tal manera, que la pantalla rectangular ofrece una imagen precisa del original, pese a la menor anchura.

En los análisis siguientes de la representación gráfica, permanecen invariables los datos del “cuboide de visualización”; en la primera imagen los valores por defecto del ángulo de visualización son respectivamente: **ángulo $\theta = 30^\circ$** , **ángulo $\phi = 70^\circ$** .

$z = z_{\max} - a \cdot x^2$, una “muralla“(cilindro parabólico):

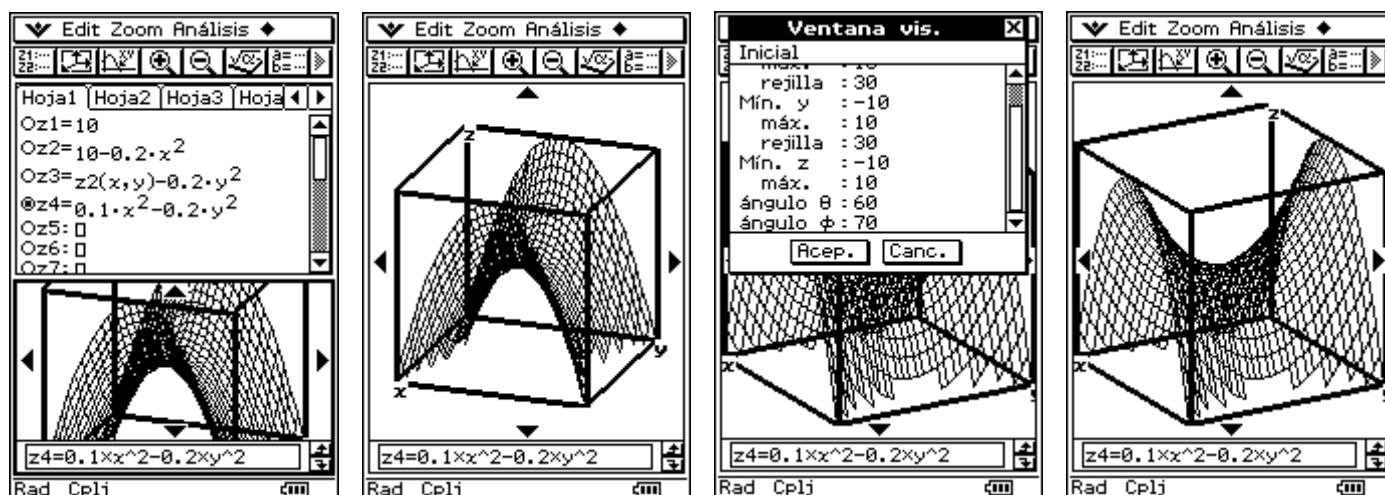


$z = z_{\max} - a \cdot x^2 - b \cdot y^2$, una “montaña”(paraboloide de revolución):

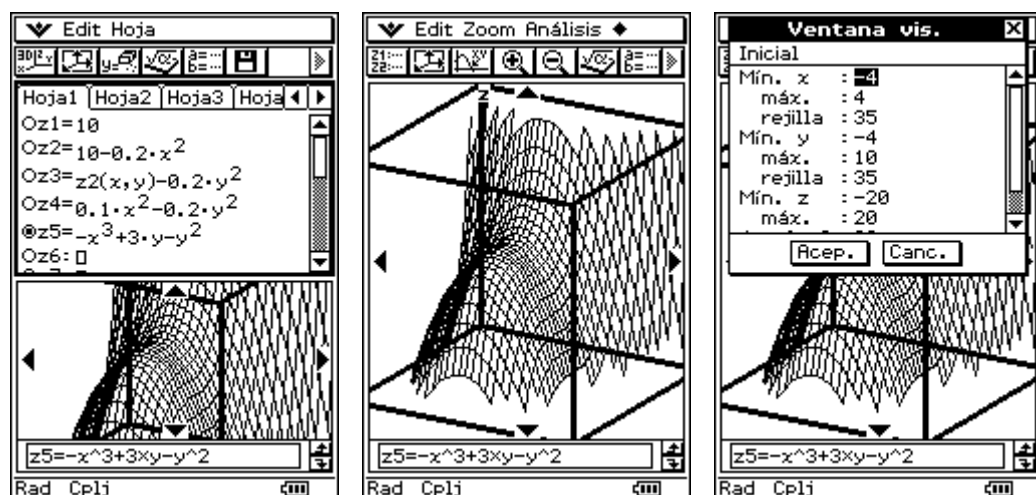


$z = a \cdot x^2 - b \cdot y^2$, una “silla de montar”(superficie de la silla con $a = 1/10$, $b = 1/5$).

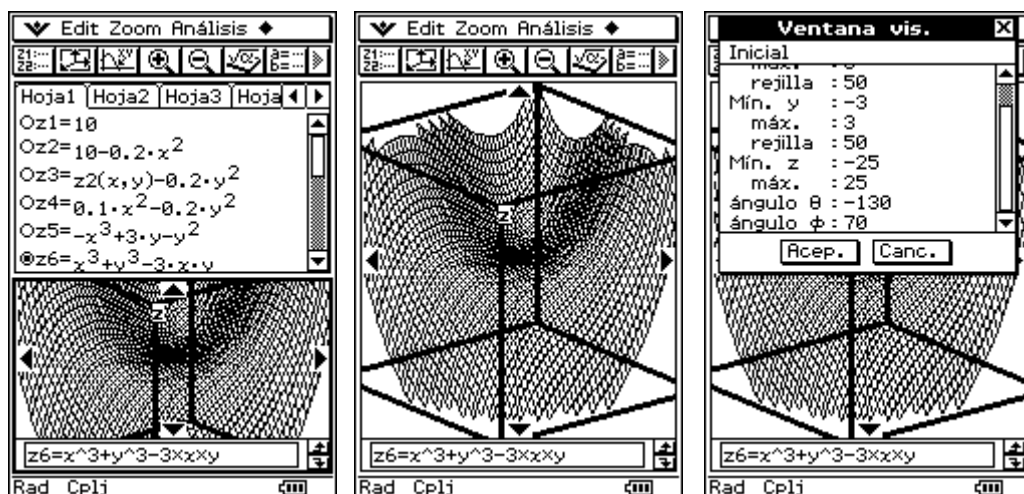
Aquí, en la segunda imagen, para mostrar la silla de montar más exactamente, se ha inclinado la dirección de visualización a **ángulo $\theta = 60^\circ$** :



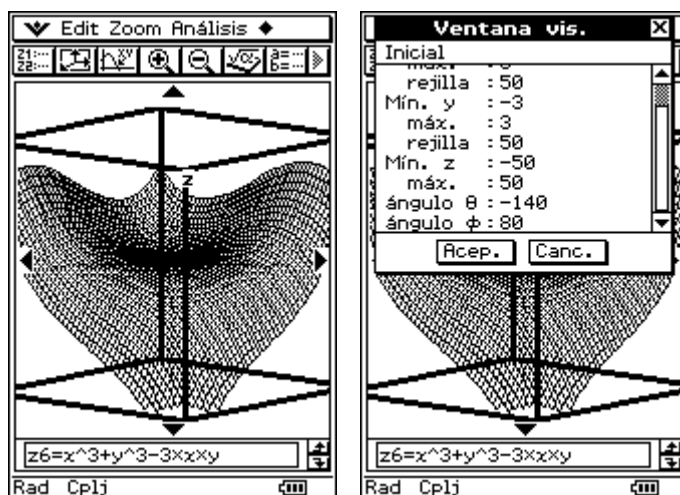
$z = -x^3 + a \cdot y - y^2$, una “cordillera con desfiladero”(con $a = 3$):



$z = x^3 + y^3 - a \cdot x \cdot y$, una “cordillera con plataforma de observación” (con $a = 3$). Ya que en la primera imagen la cordillera sólo se podía ver por detrás, se ha rotado completamente la vista en la segunda ventana:

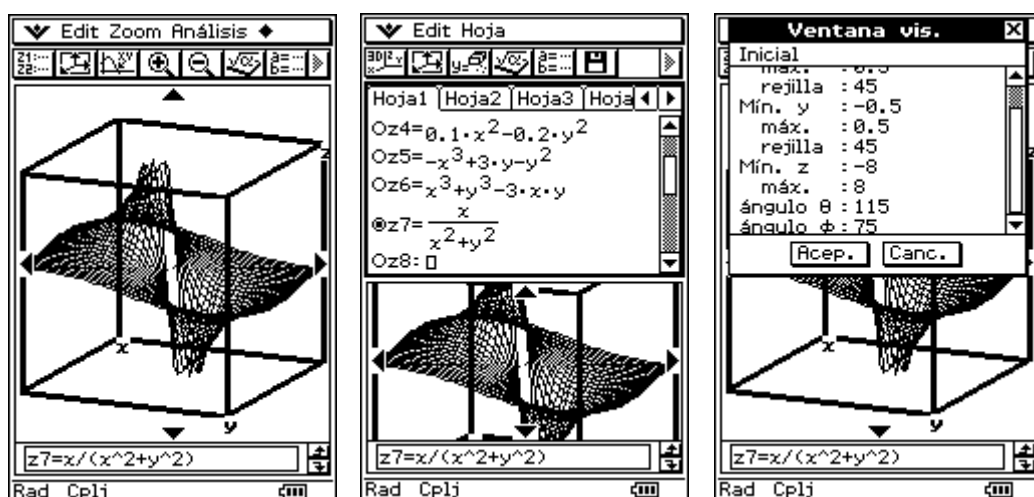


En el gráfico de la derecha se ha aumentado el rango de las z al intervalo $-50 \leq z \leq 50$:



$z = x / (x^2 + y^2)$ o bien $z = -y / (x^2 + y^2)$,
($z_1 + z_2 \cdot j = 1 / (x + j \cdot y)$)

El gráfico siguiente se observa desde el segundo cuadrante. Se pueden distinguir las limitaciones del trazado 3D hecho con una calculadora; sin embargo, en calidad es muy superior a lo que se puede obtener dibujando con tiza y pizarra.



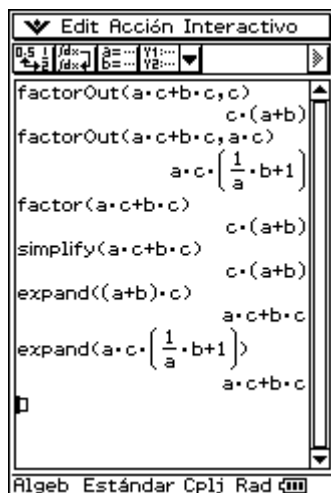
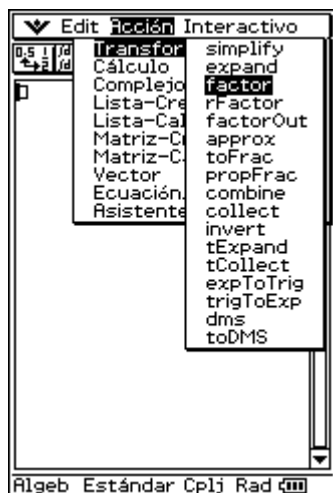
Ejercicios

8.1 Represente gráficamente la siguiente superficie y encuentre los ajustes adecuados para el cuboide de representación:

$$z = \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y).$$

9 Cálculo simbólico con términos de fórmulas

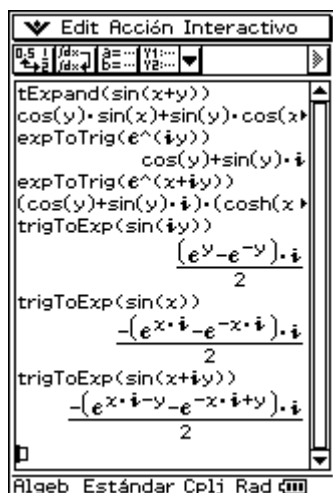
¿Por qué a veces la integración simbólica nos lleva a unas funciones primitivas distintas de las esperadas?



Las transformaciones de términos más sencillas, que en este capítulo serán tratadas de forma introductoria, son la factorización y la expansión:

$$a \cdot c + b \cdot c = (a + b) \cdot c \quad \text{y} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Para ello, abrimos el menú principal, y ahí, en la cabecera, encontramos el menú **Acción**, submenú **Transformación**, con las órdenes **factorOut(...)**, **factor(...)**, **simplify(...)** y **expand(...)**:



Una orden que va más allá en el cálculo simbólico es, por ejemplo, **tExpand(sin(x + y))**, para obtener un conocido teorema de la suma trigonométrica:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$$

La ClassPad 300 también “conoce”, por supuesto, la fórmula de Euler:

$$e^{i \cdot y} = \cos(y) + i \cdot \sin(y), \text{ y la calcula: } \text{expToTrig}(e^{i \cdot y})$$

La transformación **expToTrig(e^{x + iy})** da la representación no muy habitual: **(cos(y) + i · sin(y)) · (cosh(x) + sinh(x))**

Como es bien sabido aquí resulta: **cosh(x) + sinh(x) = e^x**.

Las consiguientes órdenes **trigToExp(...)** ponen en evidencia conexiones entre la función **sin** y la función compleja **e**, que se pueden encontrar también en una colección de fórmulas.

En ese sentido se podría usar también la ClassPad 300 como una colección electrónica de fórmulas o bien un banco de datos.

Se le pide a la ClassPad 300, por ejemplo, la representación de la función **sin** a través de la función compleja **e**, y se obtiene enseguida la respuesta deseada:

$$\text{trigToExp}(\sin(x)) = -i \cdot (e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}) / 2 (= -i \cdot \sinh(i \cdot x)).$$

Sin necesidad de órdenes adicionales, la ClassPad 300 simplifica a la inversa:

$$\sinh(i \cdot x) = i \cdot \sin(x).$$

Las siguientes transformaciones se ocupan de integrales elementales:

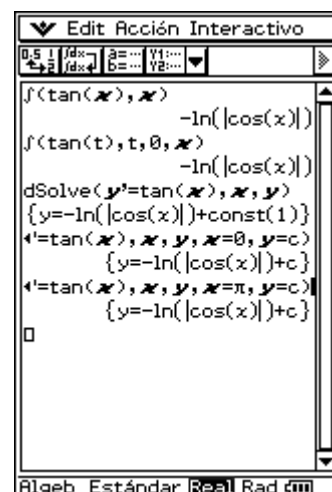
La conocida integral elemental $\tan(x)$ se calcula mediante la orden de integración $\int \tan(x) dx$, en la ClassPad 300 mediante $\int(\tan(x), x)$, o como integral definida con límite superior simbólico $\int(\tan(t), t, 0, x)$.

Pista para iniciados

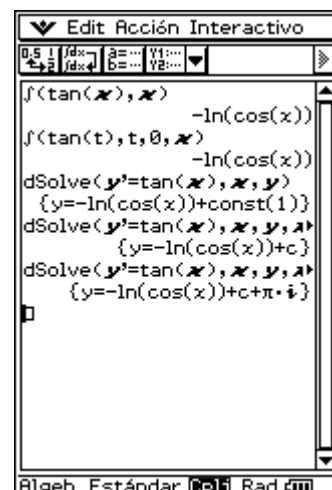
Si se desea la integral elemental con constante de integración C_1 , sólo hay que resolver la “ecuación diferencial” $y' = \tan(x)$ con el solucionador de ecuaciones diferenciales $dSolve(y' = \tan(x), x, y)$, y se obtiene la respuesta deseada:

$$y = -\ln(|\cos(x)|) + \text{const}(1) = -\ln(|\cos(x)|) + C_1.$$

La ClassPad300 designa constantes simbólicas reales como **const(1)**, **const(2)**, ...



El resultado concreto $y = -\ln(|\cos(x)|) + c$ (con $y(0) = c$, y la constante de integración c) se obtienen también como Problema de valores iniciales $dSolve(y' = \tan(x), x, y, x = 0, y = c)$. Con $y(\pi) = c$ se obtiene igualmente $dSolve(y' = \tan(x), x, y, x = \pi, y = c) = \{y = -\ln(|\cos(x)|) + c\}$.



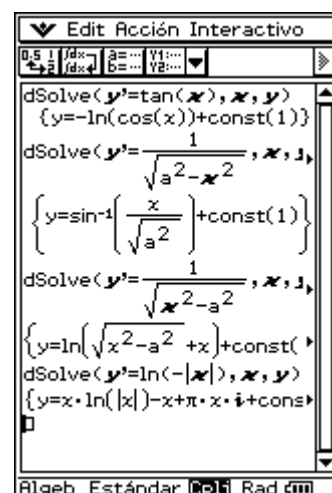
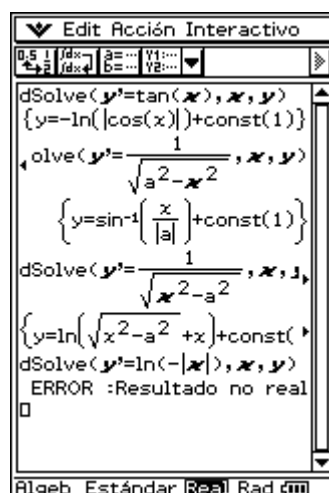
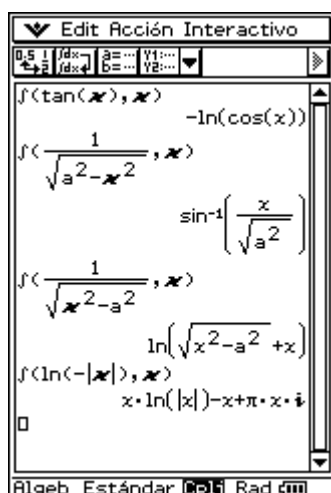
Sugerencia:

Si se calcula en modo complejo en lugar de en modo real, no aparecen las barras de valor absoluto en las primitivas. De esta manera, la función primitiva $y = -\ln(\cos(x))$ estaría definida en el conjunto de los reales sólo de manera incompleta; para ser precisos, sólo para $\cos(x) > 0$.

Para el problema de valores iniciales $y' = \tan(x)$, $y(\pi) = c$, se obtiene ahora $dSolve(y' = \tan(x), x, y, x = \pi, y = c) = \{y = -\ln(\cos(x)) + c + i * \pi\}$.

Las siguientes pantallas muestran, a modo de ejemplo, funciones primitivas que se calculan en modo real y en modo complejo respectivamente. Se dan tres hechos conspicuos:

- en el modo complejo no proceden las barras de valor absoluto, ya que en este caso el logaritmo también está definido para números negativos.
- una integral no definida en reales es resoluble en complejos.
- Mientras que en reales la notación es $|a|$, en complejos resulta “Raíz de a^2 ”, ¿por qué?

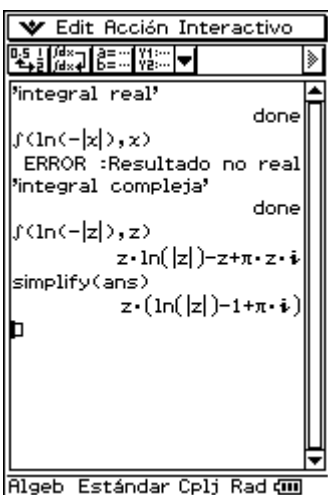
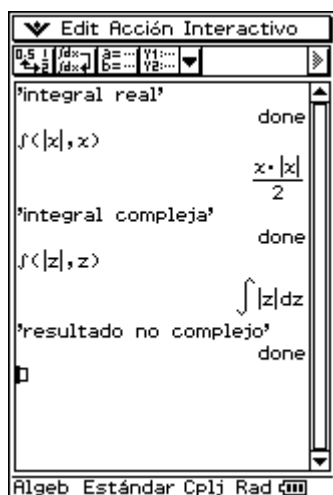


La última pregunta formulada puede aclararse como sigue:

En modo complejo la variable simbólica es un número de la forma $a = \text{re}(a) + i * \text{im}(a)$, es decir, para $|a|$ rige ahora (siempre y cuando $\text{im}(a) \neq 0$):

$$|a| = \sqrt{(\text{re}(a))^2 + (\text{im}(a))^2} \neq \sqrt{a^2} = \sqrt{(\text{re}(a))^2 - (\text{im}(a))^2 + i \cdot 2 \cdot \text{re}(a) \cdot \text{im}(a)}$$

Más aún: En complejos $\sqrt{a^2}$ es la raíz principal (compleja); por ejemplo, se desprende de $a^2 = (-1 - i)^2 = 2i$ la raíz principal $\sqrt{2i} = 1 + i = -a$ ($|a| = \sqrt{2}$).



Con las siguientes imágenes la confusión se acentúa:

La integral compleja $\int(|z|, z)$ no se calcula, aunque la integral real puede ser calculada: $\int(|x|, x) = x \cdot |x| / 2$. El otro caso de no existencia de integral de reales, $\int(\ln(-|x|), x)$ no es difícil de entender.

Para el lector curioso viene a continuación una aclaración de la Teoría de las funciones complejas (abreviado: **Teoría de funciones**):

En el concepto de integral compleja $\int(f(z), z)$, se entiende siempre la integral curvilínea compleja (integral de contorno) $\int f(z) dz = \int f(x + i * y)(dx + i * dy)$ con el requisito de que $f(z)$ posea una primitiva (se dice en este caso que $f(z)$ es una función regular (analítica, holomorfa)). Para la integral de contorno no se da en este caso ningún camino de integración, ya que la integral (curvilínea) compleja tiene la característica de la independencia de caminos para una función regular $f(z)$.

La regularidad de $f(z)$ puede probarse de nuevo mediante las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \partial \text{re}(f(x + i * y)) / \partial x &= \partial \text{im}(f(x + i * y)) / \partial y \quad \text{y} \\ \partial \text{re}(f(x + i * y)) / \partial y &= -\partial \text{im}(f(x + i * y)) / \partial x \end{aligned}$$

Aquí se demuestra fácilmente que $f(z) = |z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ para $z \neq 0$ no es regular:

$$\begin{aligned} \partial \text{re}(f(x + i * y)) / \partial x &= \partial (x^2 + y^2)^{1/2} / \partial x = x * (x^2 + y^2)^{-1/2} \neq \\ &\neq \partial \text{im}(f(x + i * y)) / \partial y = \partial 0 / \partial y = 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \partial \text{re}(f(x + i * y)) / \partial y &= \partial (x^2 + y^2)^{1/2} / \partial y = y * (x^2 + y^2)^{-1/2} \neq \\ &\neq -\partial \text{im}(f(x + i * y)) / \partial x = \partial 0 / \partial x = 0 \end{aligned}$$

De esta manera resulta claro, para sorpresa de todos los lectores no versados en la Teoría de funciones, que $f(z) = |z|$ en complejos no posee ninguna primitiva y la integral (indefinida) $\int(|z|, z)$ no es calculable (¡aunque sí en reales!) Por tanto la ClassPad 300 ha reaccionado correctamente, en modo complejo, al no transformar la integral $\int(|z|, z)$.

9.1 Descomposición parcial de fracciones

En el siguiente ejemplo se analiza la descomposición de una función racional fraccional impropia. Sea $y = f(x) = p_5(x)/p_4(x)$. Con $p_k(x)$ se designan polinomios de grado k ($k = 5$ y $k = 4$ respectivamente).

Con la orden **propFrac(...)** tiene lugar una descomposición de la función polinómica mostrada más abajo y los sumandos racionales fraccionales propios.

Pista para iniciados

Para la descomposición parcial de fracciones (DPF) de la parte racional fraccional propia, no hay ninguna orden especial para que se use la transformación a la función primitiva (integral indefinida): La integral demanda en segundo plano la DPF del integrando. Esa DPF se puede recuperar derivando la primitiva posteriormente por sumandos.

The screenshots illustrate the following steps in the CAS interface:

- Initial Expression:** The function $f(x) = \frac{3x^5 + 2x - 5}{4x^4 - 12x^3 + 29x^2 - 22x + 5}$ is entered. The command `propFrac(y)` is used to decompose it into a polynomial part and a sum of proper fractions.
- Partial Fractions:** The result is shown as a sum of terms: $\frac{345 \cdot \ln(|x^2 - 2x + 5|)}{578} + \frac{549 \cdot \ln(|2x - 1|)}{4624} + \frac{3x^2 + 9x}{4} - \frac{1340 \cdot \tan^{-1}(\frac{x-1}{2})}{289} + \frac{125}{272 \cdot (2x-1)}$.
- Derivatives:** The derivative of each term is calculated using `diff(...)` to prepare for integration.
- Integration:** The integral of the sum of derivatives is computed, yielding the primitive function.
- Verification:** The final result is shown, which is the integral of the original function, expressed as a sum of logarithmic, arctangent, and rational terms.

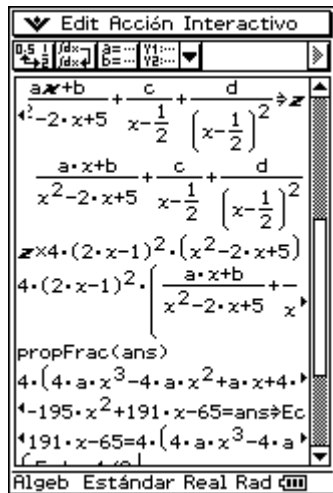
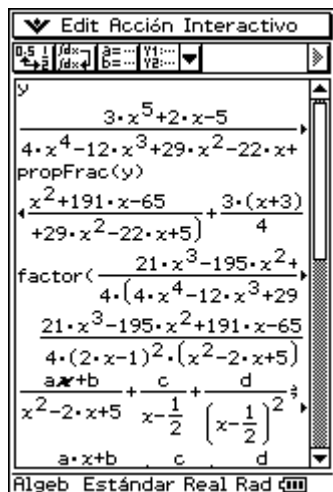
La ecuación para la DPF se ve en este ejemplo:

$$y = (3 \cdot x + 9)/4 + (A \cdot x + B)/(x^2 - 2x + 5) + C/(x - 1/2) + D/(x - 1/2)^2$$

y resulta tras el cálculo anterior con la ClassPad 300:

$$A = 345/289, \quad B = -3025/289, \quad C = 549/4624, \quad D = -125/544.$$

El camino inverso aquí sería la evaluación de la ecuación mediante una comparación de coeficientes. También en este caso la ClassPad 300 demuestra ser una herramienta eficiente.

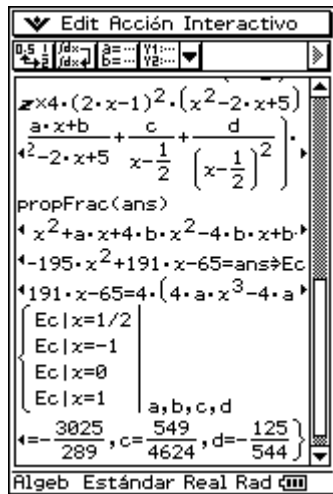
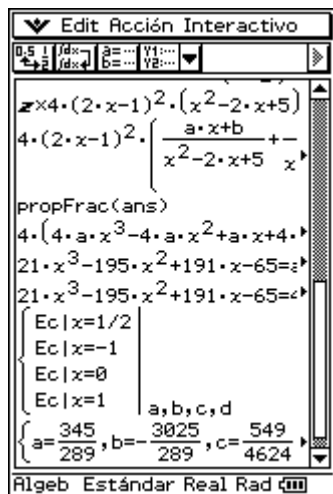


El trabajo interactivo con la ClassPad 300 discurre como sigue:

La función racional fraccional impropia es descompuesta con la orden **propFrac(...)**. Posteriormente **se factoriza** la parte racional fraccional propia para obtener los factores denominador.

Ahora ya se puede fijar la fórmula de la DPF, y almacenarla en z:

$$(A \cdot x + B) / (x^2 - 2x + 5) + C / (x - 1/2) + D / (x - 1/2)^2$$



La fórmula de z se multiplica ahora por el denominador principal, para lo cual se copia éste simplemente de la línea de respuesta de la orden **factor(...)**. ¡La nueva aplicación de la orden **propFrac(...)** simplifica el polinomio denominador!

Ahora se iguala el numerador de la línea de respuesta de la orden **factor(...)** con la respuesta (ans) de la orden **propFrac(...)**, y se almacena como **ecuación Ec**.

En lugar de la anunciada comparación de coeficientes, se construye un **sistema de ecuaciones** que consta de **cuatro ecuaciones Ec**, para lo cual se predetermina cada vez otro valor de x. De esa manera se obtienen inmediatamente los coeficientes buscados, A, B, C, y D, como anteriormente se han determinado.

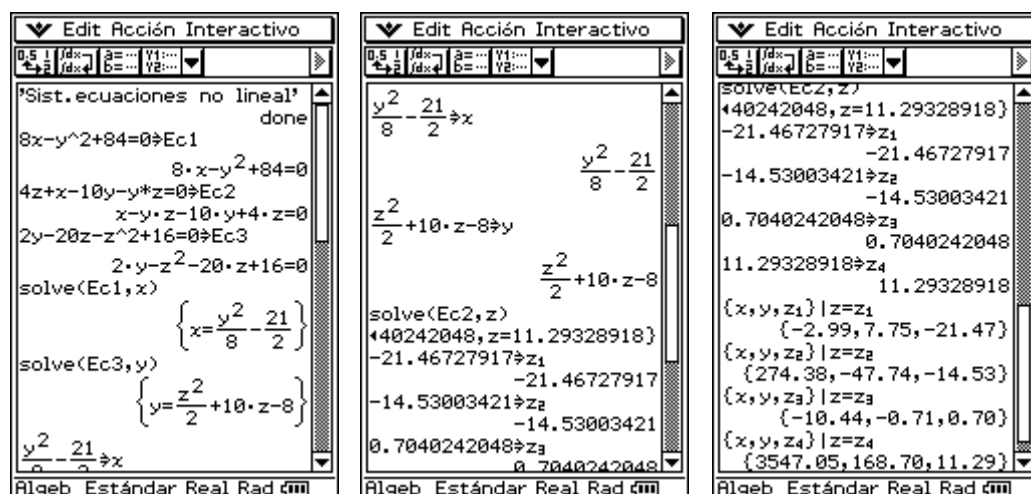
9.2 Solución de un sistema no lineal de ecuaciones.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones, con tres ecuaciones **Ec1**, **Ec2**, **Ec3**, y las tres incógnitas x, y y z:

$$(Ec1) \quad 8x - y^2 + 84 = 0 \quad (Ec2) \quad x - y(z + 10) + 4z = 0 \quad (Ec3) \quad 2y - z^2 - 20z + 16 = 0$$

Con ayuda del método de eliminación se obtienen, en pocos pasos, con la ClassPad 300, las cuatro ternas de soluciones del sistema.

También aquí la calculadora simbólica demuestra ser una herramienta de gran utilidad:



El método de solución asumido es ejecutado en el menú principal sin errores.

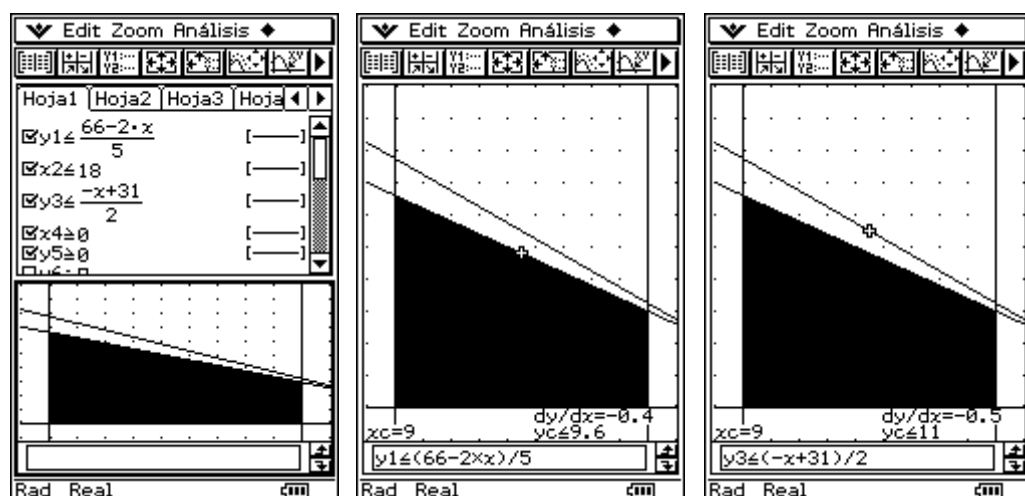
9.3 Solución de un problema de optimización no lineal.

Dada la función objetivo no lineal $z = f(x, y) = 600x \cdot 400y - 7000$ en el rango permitido R , que puede describirse mediante las siguientes restricciones:

$$(1) 2x + 5y \leq 66 \quad (2) 2x \leq 36 \quad (3) x + 2y \leq 31 \quad (4) x \geq 0 \quad (5) y \geq 0.$$

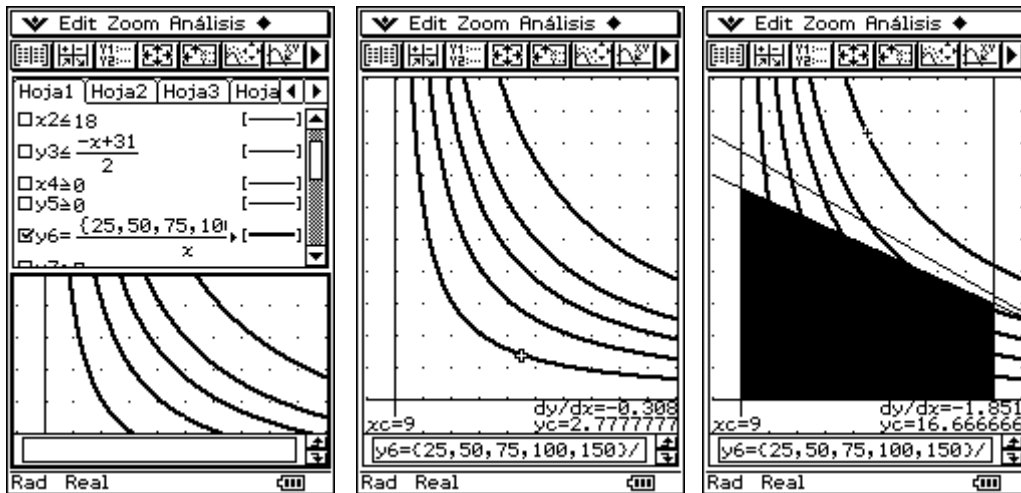
La función objetivo debe ser maximizada en R .

Mediante el tipo de gráfico de desigualdad, se representa R primeramente en el menú **Gráficos-Tablas**. Se observa que la tercera restricción es superflua, ya que es satisfecha automáticamente bajo la primera y segunda restricción. R es un área trapezoidal.



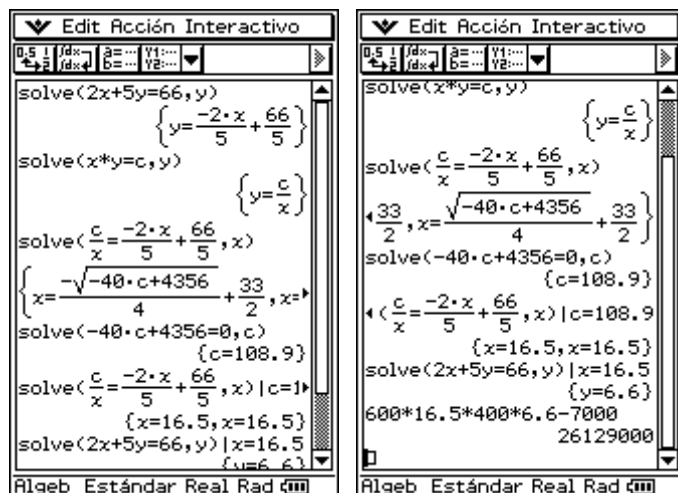
La solución gráfica se produce en las líneas de contorno de la dimensión objetivo $z = x * y$, que aparece como único término variable en la función objetivo.

Primeramente se dibujan las líneas de contorno para $z = 25, 50, 75, 100, 150$:
 $y = z / x$.



Con valores crecientes de z , las líneas de contorno se van hacia arriba a la derecha.

La solución óptima se origina si la línea de contorno sólo toca el área **R** en un punto.



En el menú principal, se hace que se corten la línea de contorno y la línea límite: la línea de contorno $x \cdot y = c$ y la recta $2x + 5y = 66$. Se elimina y . La solución para x es independiente de c , y resulta única cuando el término raíz es cero.

De ello se desprende que $c = 108.9$

El resultado final resulta pues: $z_{\text{opt}} = 26129000$ para $x_{\text{opt}} = 16.5$ y $y_{\text{opt}} = 6.6$.

10 Cálculo simbólico con sucesiones numéricas

¿Cómo se determinan las fórmulas de cálculo para una secuencia numérica o para una sucesión de sumas parciales?

Mediante las órdenes de la ClassPad **sequence(...)** y **sumSeq(...)**, pueden establecerse las fórmulas de cálculo para determinados tipos de sucesiones cuando se conocen los valores numéricos de algunos elementos de la secuencia.

Sugerencia:

La inferencia de la regla general a partir de elementos concretos de una sucesión no es única si no se tiene en mente de antemano la regla de formación para un determinado tipo de sucesiones numéricas.

Por ejemplo, tenemos que la sucesión $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, \dots$, que en los primeros elementos se comporta como sucesión geométrica, no tiene por qué serlo. El curso posterior de la secuencia podría discurrir de manera diferente.

Las órdenes citadas anteriormente examinan leyes de formación que tienen carácter polinómico.

La orden **sequence(Lista)** proporciona un polinomio del grado más bajo posible, que corresponda a la sucesión numérica (con rango de indexación $k = 1, 2, \dots$) expresada a través de la lista introducida, por ejemplo **Lista** = $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{3, 5, 7, 9\}$.

La orden **sequence(Lista1, Lista2)** proporciona un polinomio que asigna a cada elemento de la primera lista el correspondiente elemento de la segunda lista (polinomio a través de pares de puntos dados (k, a_k)).

La variable simbólica es de esta manera x , siempre y cuando no se predetermine otro nombre de variable como parámetro adicional en la orden **sequence(...)**:

sequence(Lista, k), o bien **sequence(Lista1, Lista2, k)**

Ejemplo (sucesión aritmética)

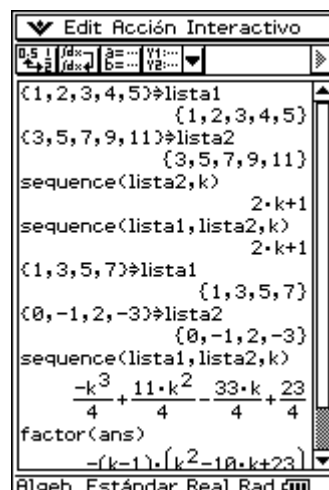
Se trata de determinar la ley de formación (polinomio) de una sucesión numérica, que viene dada mediante **Lista** = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$.

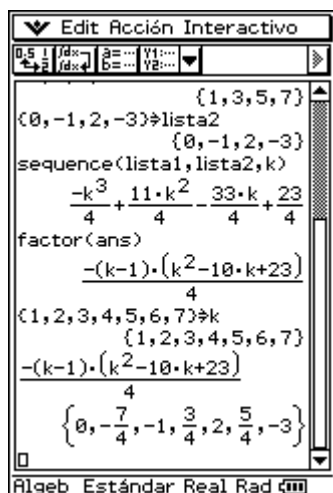
Seleccione la opción **[Acción]**, **[Lista-Calcular]**, **[sequence]** en el Menú Principal.:

El resultado es $a_k = 2k + 1, k = 1, 2, \dots$

En la imagen de la derecha se aprecia que la entrada de la Lista1 no es necesaria, ya que sólo contiene los índices iniciales.

En el siguiente ejemplo se predeterminan los índices impares, con lo cual Lista1 debe aparecer necesariamente en la orden **sequence(...)**.





Ejemplo

Se trata de determinar una ley de formación (polinomio de pares de números dados) que asigne a cada elemento de la lista $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{1, 3, 5, 7\}$, es decir a cada índice impar k , el elemento correspondiente de la lista $\{a_1, a_3, a_5, a_7\} = \{0, -1, 2, -3\}$.

En el Menú Principal seleccione [Acción] [Lista-Calculador] [sequence]:

Resultado: $a_k = (-k^3 + 11k^2 - 33k + 23)/4, \quad k = 1, 2, \dots$

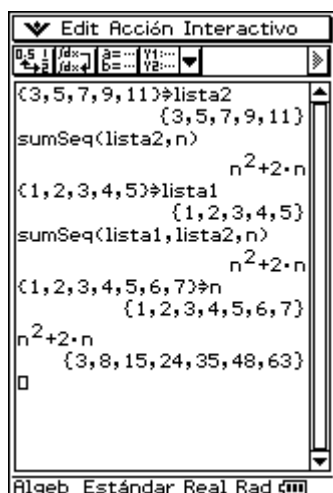
o bien, factorizado:

$$a_k = -(k-1) \cdot (k^2 - 10k + 23)/4, \quad k = 1, 2, \dots$$

Este último resultado muestra que la ley de formación para los índices impares produce, en efecto, los valores predeterminados.

10.1 Sucesiones de sumas parciales

Ahora estableceremos, para los ejemplos tratados anteriormente, las sucesiones de sumas parciales $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n = 1, 2, \dots$, y para ello utilizaremos la orden **sumSeq(...)**.



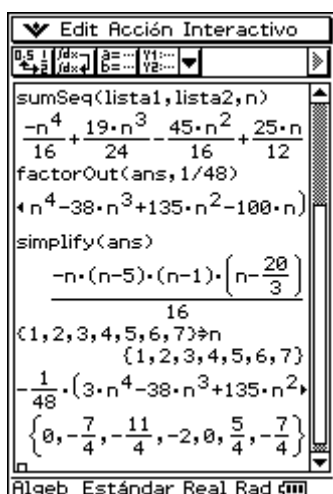
Ejemplo (Sumas parciales de una sucesión aritmética)

Se trata de determinar una ley de formación (polinomio) para la sucesión de sumas parciales, si la sucesión numérica viene dada mediante la Lista = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = \{3, 5, 7, 9, 11\}$.

En el Menú Principal seleccione [Acción] [Lista-Calculador] [sequence]:

El resultado da $s_n = n^2 + 2n, \quad n = 1, 2, \dots$

Finalmente se obtienen las sumas parciales $s_1, s_2, \dots$; véase la imagen de la izquierda.



Ejemplo

Se trata de determinar una ley de formación (polinomio) para la sucesión de sumas parciales, si la sucesión numérica viene dada mediante las listas asociadas $\{k_1, k_2, k_3, k_4\} = \{1, 3, 5, 7\}$ y $\{a_1, a_3, a_5, a_7\} = \{0, -1, 2, -3\}$. La primera lista vuelve a ser la lista de índices.

En el Menú Principal seleccione la opción [Acción] [Lista-Calculador] [SumSeq]:

Resultado: $s_n = (-3n^4 + 38n^3 - 135n^2 + 100n)/48, \quad n = 1, 2, \dots$

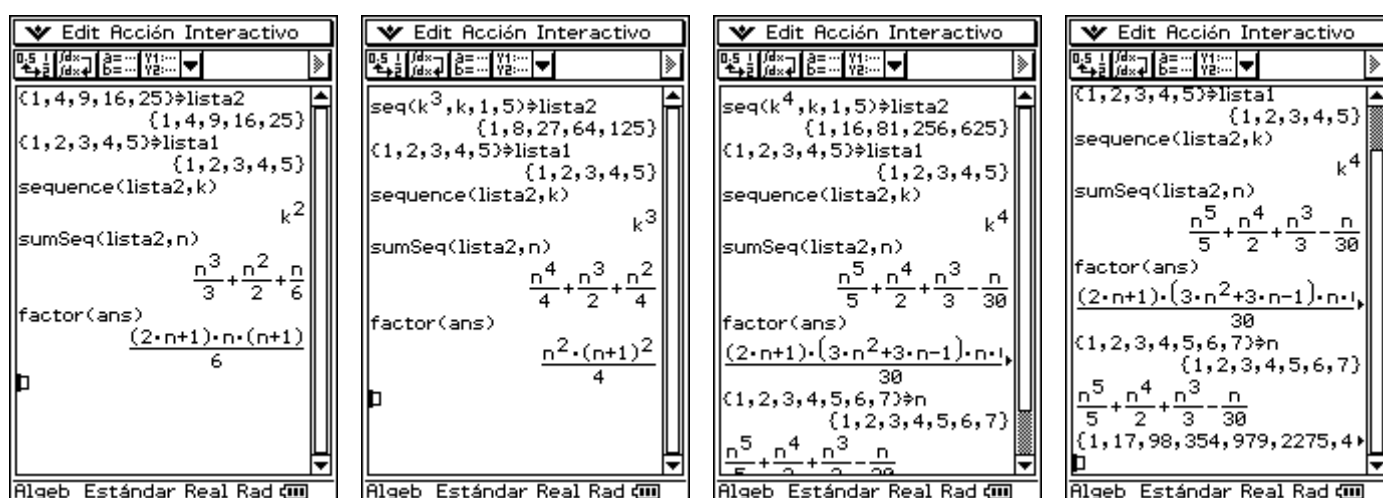
También es interesante la representación factorial de las sumas parciales:

$$s_n = -n \cdot (n-5) \cdot (n-1) \cdot (3n-60) / 48, \quad n = 1, 2, \dots$$

Finalmente se obtienen las sumas parciales $s_1, s_2, \dots$; véase la imagen de la izquierda.

Pista para iniciados

Con la orden **sumSeq(...)** se pueden obtener las fórmulas de las sumas de las sucesiones numéricas de las potencias fijas, por ejemplo $\sum (k, k, 1, n)$, $\sum (k^2, k, 1, n)$, $\sum (k^3, k, 1, n)$, $\sum (k^4, k, 1, n)$, etc. Aquí sólo hay que predeterminar la sucesión de las potencias fijas que se obtienen con la orden **seq(...)**, por ejemplo **seq(k, k, 1, 5)**, **seq(k², k, 1, 5)**, **seq(k³, k, 1, 5)**, **seq(k⁴, k, 1, 5)**, etc. Por ello debe tenerse en cuenta que la potencia fija $a_k = k^m$ es un polinomio de grado m y, por tanto, hay que predeterminar como mínimo $m + 1$ números en la lista de secuencia numérica **seq(k^m, k, 1, m + 1)**. En la base está el hecho de que mediante $m+1$ pares de datos (k, a_k) , $k = 1, 2, \dots, m + 1$, se puede fijar un polinomio de grado m de manera única, con lo cual aquí este polinomio degenera a k^m .



Ejemplo

Use la orden **seq(...)** sobre la sucesión numérica $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{2, 4, 8, 16\}$ e interprete el resultado.

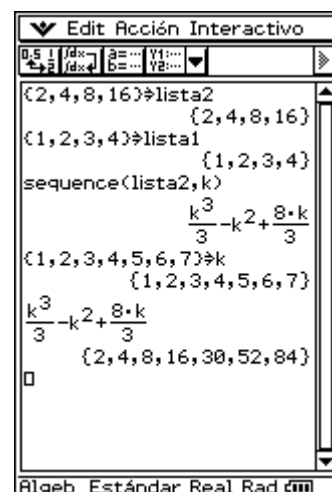
La conjetura de una sucesión numérica geométrica $a_k = 2^k$ no puede ser reconocida por la orden **sequence(...)**, ya que proviene de una ecuación polinómica y, por tanto, define la ley de formación $a_k = (k^3 - 3k^2 + 8k)/3$.

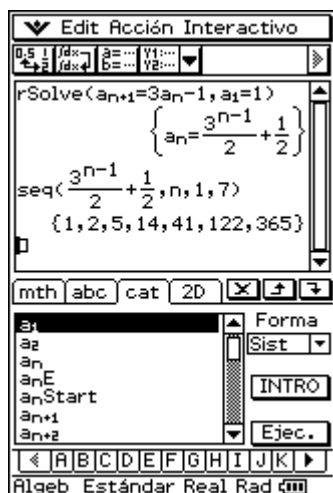
10.2 La orden rSolve(...)

Otra orden relacionada con las sucesiones numéricas es **rSolve(...)**. La “r” significa “**recursiva**”. Así, la fórmula puede calcular la ley explícita de formación para una sucesión (la llamada ecuación de diferencia) a partir de una fórmula recursiva de primer o segundo orden de dicha sucesión.

Ejemplo

Se trata de determinar la representación para el k -ésimo elemento de la sucesión numérica con la fórmula recursiva $a_{k+1} = 3a_k - 1$, y el elemento inicial $a_k = 1$.





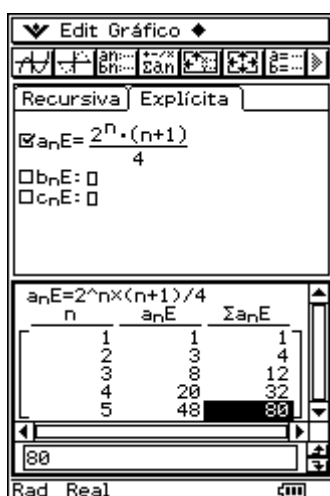
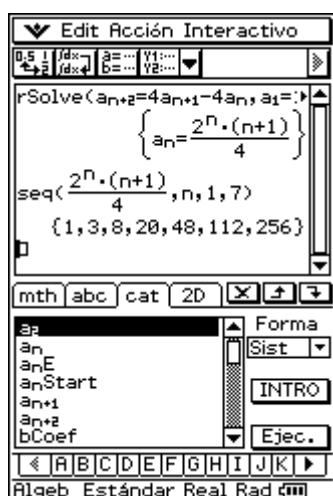
La orden **rSolve(...)** se encuentra en el Menú Principal [Acción] [Ecuación / Desigualdad.]. La fórmula recursiva debe introducirse mediante las variables de sistema a_{n+1} y a_n . Estas variables se encuentran en el teclado virtual, pestaña **cat**, en **Forma: Sist**.

Resultado: $a_n = (3^{n-1} + 1)/2, \quad n = 1, 2, \dots$

De aquí en adelante se puede generar con la orden **seq(...)** directamente la sucesión numérica.

Prueba:

$$a_{n+1} = (3^{(n+1)-1} + 1)/2 = (3 \cdot 3^{n-1} + 1)/2 = (3 \cdot (2 \cdot a_n - 1) + 1)/2 = 3 \cdot a_n - 1.$$



Ejemplo (recursión de segundo orden)

Se trata de determinar la representación para el n -ésimo elemento de la sucesión con la fórmula recursiva $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ y los elementos iniciales $a_1 = 1, a_2 = 3$.

Resultado: $a_n = 2^n \cdot (n+1)/4, \quad n = 1, 2, \dots$

Con la orden **seq(...)** se puede, a partir de ahora, generar directamente la sucesión numérica. La segunda imagen se crea a partir del Menú Secuencia.

Se pueden encontrar más sugerencias y ejemplos sobre el tema Sucesiones numéricas en el capítulo 6 del Manual: “**Análisis con sucesiones numéricas**”. El menú para sucesiones numéricas le ofrece las herramientas necesarias para el trabajo con representaciones explícitas y representaciones recursivas de sucesiones numéricas.

Ejercicios

10.1 Verifique el siguiente límite mediante la ClassPad 300:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e \quad (\text{Aquí } e \text{ es el número de Euler } 2.71828\dots)$$

10.2 Solucione, con la ayuda de la orden **rSolve(...)** de la ClassPad300, el sistema de ecuaciones consistente en dos fórmulas recursivas, dando para ello las representaciones explícitas para a_n y b_n .

Fórmulas recursivas $a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 3b_n$; condiciones iniciales $a_1 = 2, b_1 = 1$.

(Sugerencia para la sintaxis:

$$\text{rSolve}(\{a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 3b_n\}, \{a_1 = 2, b_1 = 1\})$$

10.3 Calcule el primer elemento de la sucesión $a_n = (-1)^n (n+1)/(2n-1), \quad n = 1, 2, \dots$, y determine si converge la sucesión de sumas parciales correspondiente.

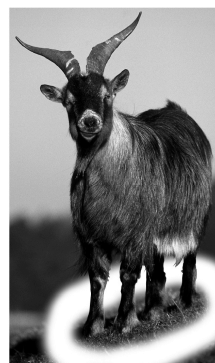
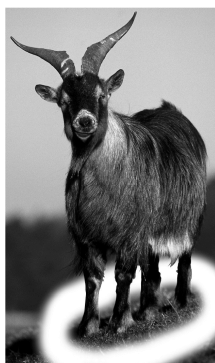
11 Cálculo de probabilidad y Estadística

¿En qué consiste la diferencia entre un modelo de teoría de la probabilidad y una simulación estadística?

11.1 El problema de Monty Hall

Dicha diferencia debería clarificarse a través de un ejemplo. Para ello consideramos el juego “**Dos cabras y un coche**” (**Monty-Hall-Problem, Let’s Make a Deal**), extraído de un concurso televisivo que fue emitido hace más de diez años en la televisión norteamericana, el cual desencadenó múltiples discusiones respecto del carácter estocástico del juego.

Se trata de tres puertas etiquetadas con los números 1, 2 y 3. Detrás de una de las puertas hay un coche, y detrás de las otras dos, sendas cabras.



Las reglas del juego son las siguientes:

1. El jugador elige una puerta (detrás de la cual supone el coche).
2. El presentador abre entonces otra puerta (detrás de la cual hay una cabra).
3. El presentador deja a continuación a criterio del jugador la posibilidad de cambiar su puerta por la otra cerrada.
4. Finalmente se abre la puerta con la que se ha quedado definitivamente el jugador. Gana el coche en caso de que esté detrás de esta última puerta elegida.

Mediante la **ClassPad 300** queremos simular n (digamos $n = 100$) situaciones como la del concurso para ver si la estrategia del cambio de la puerta es o no ventajosa respecto a la probabilidad de ganar.

Así pues, la simulación nos da un punto de referencia sobre qué estrategia podría ser la mejor para el jugador:

“mantener la puerta elegida originalmente”

o

“rechazar la puerta elegida inicialmente para cambiar a la otra cerrada”

Con este experimento el lector aprende a entender mejor las casualidades de la vida real. Se da cuenta de que a veces una conjetura razonable (“la probabilidad de acertar entre las dos puertas aún cerradas es 50 a 50 con total seguridad”) es en este caso engañosa ¡e incluso falsa!

Marilyn Vos Savant, periodista científica, afirmó al efecto por aquel entonces de manera muy clara que con el cambio a la otra puerta la probabilidad de ganar se doblaba. Ello condujo a grandes discusiones públicas. ¿Qué piensa usted al respecto?

Para poder ejecutar el programa de simulación en su ClassPad 300 debe copiar los siguientes archivos de Internet en su PC.

“Paditz_02_06_2003.mcs” y “Paditz_02_06_2003.flc”

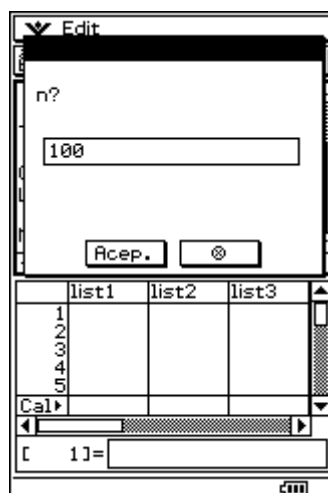
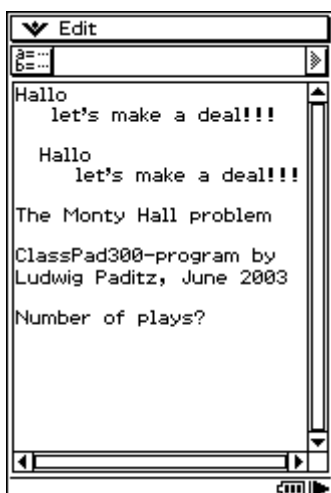
Con estos archivos puede empezar la simulación en el emulador virtual de la ClassPad 300, o bien transferir desde el Administrador de la ClassPad el programa **Monty Hall**. También puede teclear en su ClassPad 300 el programa de más abajo abriendo el Editor de Programas (Menú Programa) e introduciendo las órdenes de aquél.

Los datos citados anteriormente se encuentran en:

http://www.informatik.htw-dresden.de/~paditz/Paditz_02_06_2003.zip



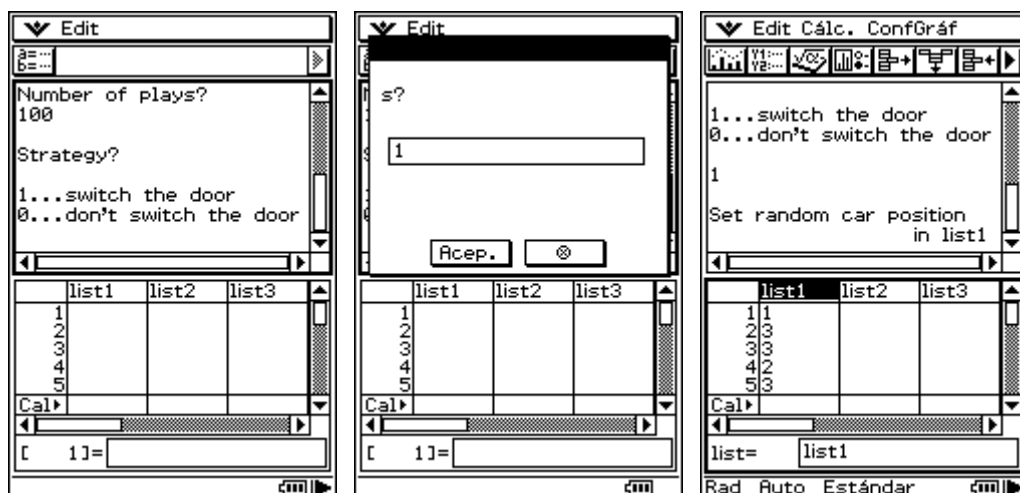
Elija para la ejecución del programa la opción “Monty Hall” de la carpeta “main”.



Comienzo:

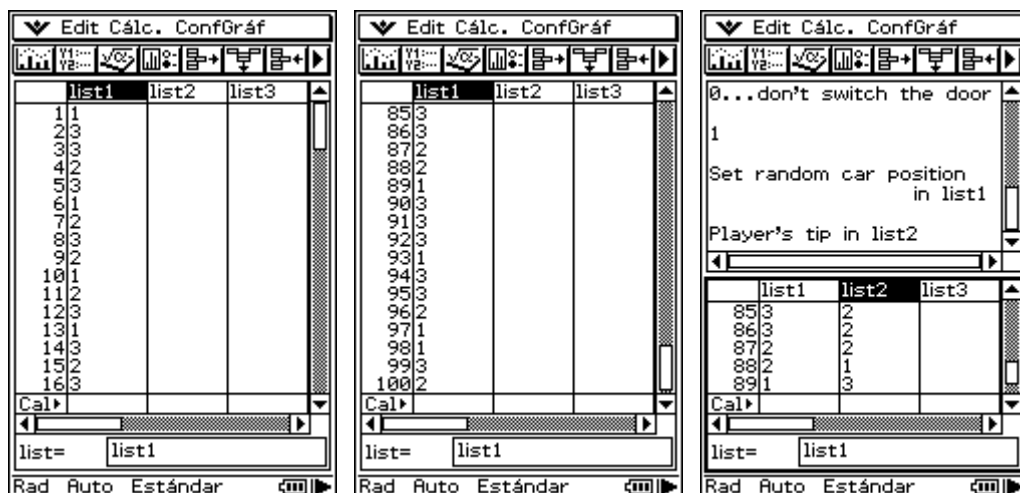
Introducción del número de jugadas que quiere simular (por ejemplo $n = 100$; véase más arriba).

Introducción de la estrategia para sus jugadas:



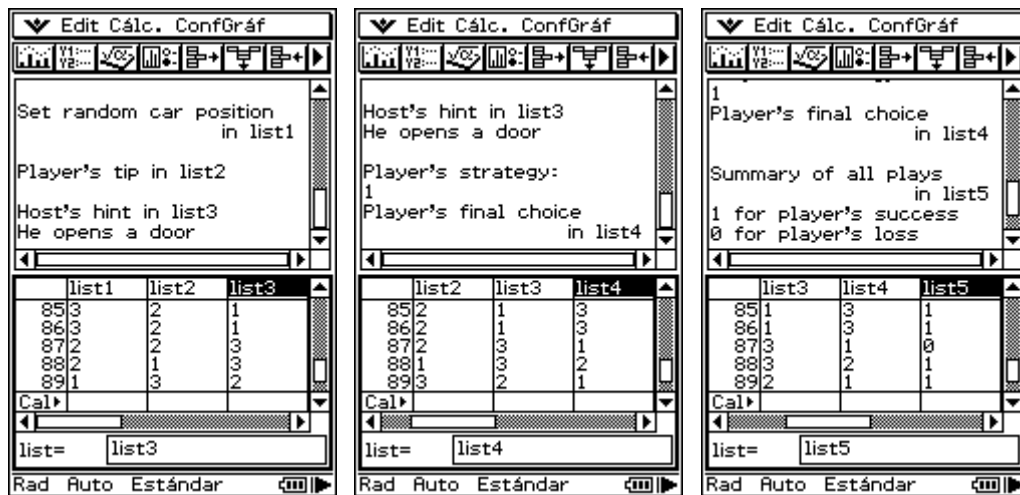
En **list1** vea las posiciones simuladas del coche (en $n = 100$ jugadas).

El programa se encuentra ahora en modo Pausa, es decir puede abrir toda la ventana del editor de listas para examinar la totalidad de la lista:



En **list2** vea la selección al azar del jugador, y en **list3** la sugerencia del presentador.

list4 muestra la elección definitiva del jugador, y **list5** da el acierto o el fallo.



list6 contiene la suma acumulada de **list5** en $n = 100$ jugadas. Aquí se acierta 65 veces mediante la estrategia 1 (es decir la estrategia 0 comportaría acierto en 35 de $n = 100$ casos).



Las listas **list7** a **list9** son listas combinadas para cada resultado de jugada:

Cada cifra describe la correspondiente elección. La cifra 0 sirve como señal de separación. Por ejemplo **10321** significa:

Coche = 1, el jugador eligió 3, se abrió 2 y el jugador cambió a 1.

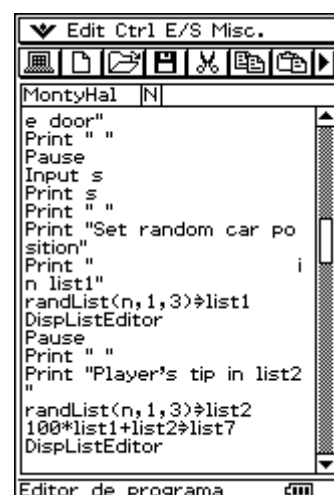
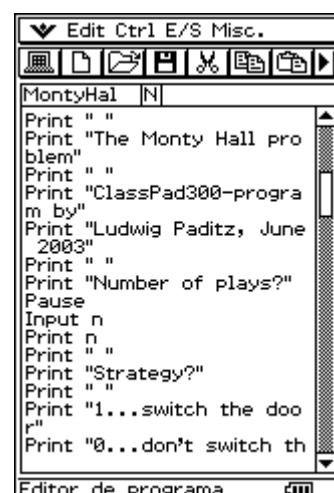


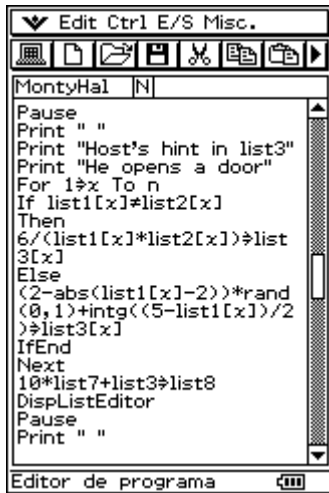
El **resultado de jugada 10321** significa, así pues, que el jugador gana el coche (con la estrategia de juego 1, es decir, cambiar puertas después de que el presentador ha abierto una).

Por ejemplo, **30312** en **list9** significa: posición del coche 3 (la cifra siguiente 0 no tiene significado), la elección del jugador es la posición 3, el presentador abre por selección al azar la puerta 1 (aquí podía elegir entre la 1 y la 2), y acto seguido el jugador cambia (estrategia de juego 1) ¡y con ello pierde!

Texto del programa

```
{ } ⇒ list1
{ } ⇒ list2
{ } ⇒ list3
{ } ⇒ list4
{ } ⇒ list5
{ } ⇒ list6
{ } ⇒ list7
{ } ⇒ list8
{ } ⇒ list9
DispListEditor
ClrText
SetFix 0
Print "Hallo"
Print " let's make a deal!!!"
Print " "
Print "Hallo"
Print " let's make a deal!!!"
Print " "
Print "The Monty Hall problem"
Print " "
Print "ClassPad300-program by"
Print "Ludwig Paditz, June 2003"
Print " "
Print "Number of plays?"
Pause
Input n
Print n
Print " "
Print "Strategy?"
Print " "
Print "1...switch the door"
Print "0...don't switch the door"
Print " "
Pause
Input s
Print s
Print " "
Print "Set random car position"
Print " in list1"
randList(n,1,3) ⇒ list1
DispListEditor
```





```

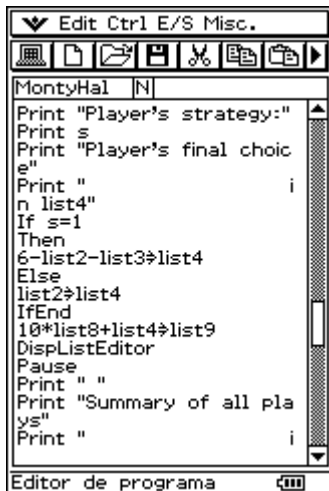
▼ Edit Ctrl E/S Misc.
MontyHal | N
Pause
Print " "
Print "Host's hint in list3"
Print "He opens a door"
For 1⇒x To n
If list1[x]*list2[x]
Then
6/(list1[x]*list2[x])⇒list3[x]
Else
(2-abs(list1[x]-2))*rand(0,1)+intg((5-list1[x])/2)⇒list3[x]
IfEnd
Next
10*list7+list3⇒list8
DispListEditor
Pause
Print " "

```

```

Pause
Print " "
Print "Player's tip in list2"
randList(n,1,3) ⇒ list2
100 × list1 + list2 ⇒ list7
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Host's hint in list3"
Print "He opens a door"
For 1 ⇒ x To n
If list1[x] ≠ , list2[x]
Then
6 / (list1[x] × list2[x]) ⇒ list3[x]
Else
(2-abs(list1[x]-2))× rand(0,1)+intg((5-list1[x])/2) ⇒ list3[x]
IfEnd
Next
10 × list7 + list3 ⇒ list8
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Player's strategy:"
Print s
Print "Player's final choice"
Print " in list4"
If s=1
Then
6 – list2 – list3 ⇒ list4
Else
list2 ⇒ list4
IfEnd
10 × list8 + list4 ⇒ list9
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Summary of all plays"
Print " in list5"
Print "1 for player's success"
Print "0 for player's loss"
For 1 ⇒ x To n
If list4[x]=list1[x]
Then
1⇒list5[x]
Else
0⇒list5[x]
IfEnd
Next
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Sum of win-plays"
Print " in list6"

```



```

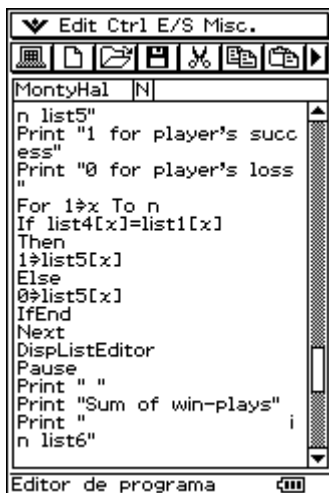
▼ Edit Ctrl E/S Misc.
MontyHal | N
Print "Player's strategy:"
Print s
Print "Player's final choice"
Print " in list4"
If s=1
Then
6-list2-list3⇒list4
Else
list2⇒list4
IfEnd
10*list8+list4⇒list9
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Summary of all plays"
Print " in list5"
Print "1 for player's success"
Print "0 for player's loss"
For 1⇒x To n
If list4[x]=list1[x]
Then
1⇒list5[x]
Else
0⇒list5[x]
IfEnd
Next
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Sum of win-plays"
Print " in list6"

```

```

Print " "
Print "Host's hint in list3"
Print "He opens a door"
For 1 ⇒ x To n
If list1[x] ≠ , list2[x]
Then
6 / (list1[x] × list2[x]) ⇒ list3[x]
Else
(2-abs(list1[x]-2))× rand(0,1)+intg((5-list1[x])/2) ⇒ list3[x]
IfEnd
Next
10 × list7 + list3 ⇒ list8
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Player's strategy:"
Print s
Print "Player's final choice"
Print " in list4"
If s=1
Then
6 – list2 – list3 ⇒ list4
Else
list2 ⇒ list4
IfEnd
10 × list8 + list4 ⇒ list9
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Summary of all plays"
Print " in list5"
Print "1 for player's success"
Print "0 for player's loss"
For 1 ⇒ x To n
If list4[x] = list1[x]
Then
1 ⇒ list5[x]
Else
0 ⇒ list5[x]
IfEnd
Next
DispListEditor
Pause
Print " "

```



```

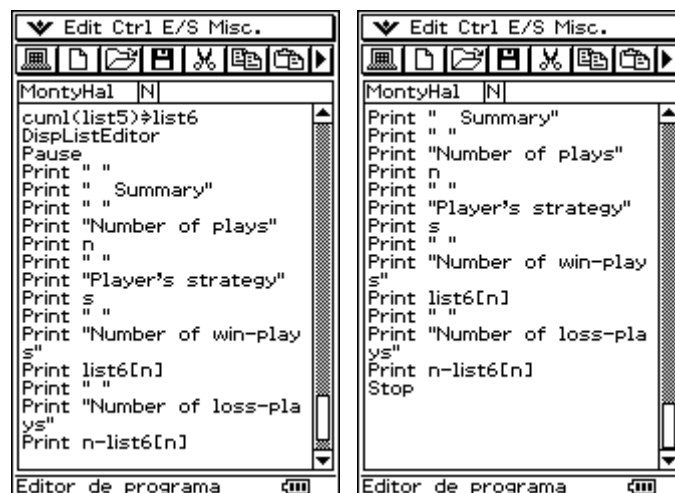
▼ Edit Ctrl E/S Misc.
MontyHal | N
n list5"
Print "1 for player's success"
Print "0 for player's loss"
For 1⇒x To n
If list4[x]=list1[x]
Then
1⇒list5[x]
Else
0⇒list5[x]
IfEnd
Next
DispListEditor
Pause
Print " "
Print "Sum of win-plays"
Print " in list6"

```

```

Print "Sum of win-plays"
Print " in list6"
Cuml(list5) ⇒ list6
DispListEditor
Pause
Print " "
Print " Summary"
Print " "
Print "Number of plays"
Print n
Print " "
Print "Player's strategy"
Print s
Print " "
Print "Number of win-plays"
Print list6[n]
Print " "
Print "Number of loss-plays"
Print n - list6[n]
Stop

```



El problema de Monty Hall y la teoría de la probabilidad

Sucesos: $A_i = \{\text{El coche está tras la puerta } i\}, i = 1, 2, 3.$
 $M_j = \{\text{El presentador abre la puerta } j\}, j = 1, 2, 3.$
 Probabilidades: $P(A_i) = 1/3$ para todas las i
 El jugador elige la puerta 1 (sin restricción de generalidad).

Probabilidades condicionadas:

$$\begin{aligned}
 P(M_2/A_1) &= 1/2 & P(M_3/A_1) &= 1/2 \\
 P(M_2/A_2) &= 0 & P(M_3/A_2) &= 1 \\
 P(M_2/A_3) &= 1 & P(M_3/A_3) &= 0
 \end{aligned}$$

Fórmula de la Probabilidad Total:

$$\begin{aligned}
 P(M_2) &= P(M_2/A_1) \cdot P(A_1) + P(M_2/A_2) \cdot P(A_2) + P(M_2/A_3) \cdot P(A_3) \\
 &= 1/6 + 0 + 1/3 = 1/2,
 \end{aligned}$$

análogamente:

$$\begin{aligned}
 P(M_3) &= P(M_3/A_1) \cdot P(A_1) + P(M_3/A_2) \cdot P(A_2) + P(M_3/A_3) \cdot P(A_3) \\
 &= 1/6 + 1/3 + 0 = 1/2.
 \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes:

$$P(A_1/M_2) = P(M_2/A_1) \cdot P(A_1) / P(M_2) = (1/2) \cdot (1/3) / (1/2) = 1/3,$$

$$P(A_3/M_2) = P(M_2/A_3) \cdot P(A_3) / P(M_2) = (1) \cdot (1/3) / (1/2) = 2/3,$$

$$P(A_2/M_2) = 0.$$

11.2 La base matemática de la simulación

Randlist($n,1,3$) genera una lista de n números aleatorios discretos, enteros, uniformemente distribuidos desde 1 hasta 3: **la posición al azar del coche** (almacenada en **list1**).

Después **Randlist($n,1,3$)** genera de nuevo una lista de n números estocásticos discretos, enteros, uniformemente distribuidos desde 1 hasta 3: **la elección al azar del jugador** (almacenada en **list2**).

En caso de que $a := \text{list1}[x]$ diferente de $k := \text{list2}[x]$,

entonces el presentador abre la puerta con el número:

$$m := f(a,k) = 6/(a * k) = 6/(\text{list1}[x] * \text{list2}[x]),$$

porque es válido en todos los casos: $\text{list1}[x] * \text{list2}[x] * \text{list3}[x] = 6$ ($6 = 1 * 2 * 3$).

Si $a := \text{list1}[x]$ igual a $k := \text{list2}[x]$,

entonces el presentador abre por selección al azar la puerta con el número:

$$\begin{aligned} m &:= f(a,k) = (2 - |a - 2|) * \text{rand}(0,1) + \text{intg}((5 - a)/2) \\ &= (2 - \text{abs}(\text{list1}[x] - 2)) * \text{rand}(0,1) + \text{intg}((5 - \text{list1}[x])/2), \end{aligned}$$

compárese la siguiente tabla:

Puerta del coche a en list1	Puerta del jugador k en list2	$m=f(a,k)$ Puerta del presentador en list3	$w(s=0)$ Estrategia del jugador en list4	$w(s=1)$ Estrategia del jugador en list4
1	1	2 $\vee$ 3	1	3 $\vee$ 2
1	2	3	2	1
1	3	2	3	1
2	1	3	1	2
2	2	1 $\vee$ 3	2	3 $\vee$ 1
2	3	1	3	2
3	1	2	1	3
3	2	1	2	3
3	3	1 $\vee$ 2	3	2 $\vee$ 1

Resumen

La simulación de datos estadísticos hace suponer que la estrategia del cambio de puerta es mejor que no hacer caso a la sugerencia del presentador:

Tras muchas jugadas con la estrategia 1 (cambio de puerta) se ve, después de la valoración estadística, que ganan aproximadamente 2/3 partes de los jugadores. Así pues el consejo del presentador debe resultar significativo, pues con la estrategia 0 (no hacer caso de la sugerencia y mantener la elección inicial) sólo ganan 1/3 de los jugadores, lo que se corresponde con la probabilidad inicial. Sin embargo, la simulación y la valoración estadística no demuestran la suposición.

La demostración viene dada por la Teoría de la Probabilidad (Probabilidades condicionadas).

En pocas palabras: Sobre las dos puertas no elegidas recae una probabilidad de 2/3, que debería mantenerse cuando el presentador abre una puerta. **¿Quién lo supone ya de antemano?**

12 Aplicación práctica 1

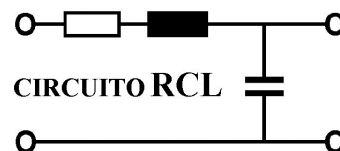
(Solución de una ecuación de onda, superposición de ondas)

¿Cómo se maneja la orden de resolución de ecuaciones diferenciales **dSolve()**?

El punto de partida de los cálculos siguientes es una oscilación eléctrica forzada, que se describe mediante una ecuación diferencial de segundo orden:

$$d^2 y / dt^2 + 2\delta dy / dt + \omega_0^2 y = \omega_0^2 f(t),$$

donde $2\delta = R/L$ y $\omega_0^2 = 1/LC$.



12.1 Ejemplo numérico 1

$R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 312 \text{ }\mu\text{F}$, $f(t) = 0$,

ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes $2\delta = 2/\text{ms}$, $\omega_0^2 = 0.64 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$ (oscilación eléctrica libre atenuada, oscilación aperiódica, sobreamortiguación $\delta > \omega_0$)

$$d^2 y / dt^2 + 2/\text{ms} dy / dt + 0.64 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2} y = 0,$$

con $x = t/\text{ms}$: $d^2 y / dx^2 + 2 dy / dx + 16/25 \cdot y = 0$.

Ecuación característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 16/25 = 0$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3/5$.

Solución general con $\lambda_1 = -8/5$ y $\lambda_2 = -2/5$: $y = C_1 e^{-8x/5} + C_2 e^{-2x/5}$.

Solución especial con las condiciones iniciales (CI)

$y_0 = y(0) = 1$, $y'_0 = y'(0) = 0$: $y = 4/3 e^{-2x/5} - 1/3 e^{-8x/5}$.

Gráfico de una sobreamortiguación.

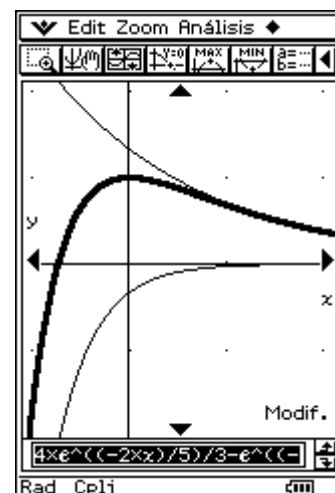
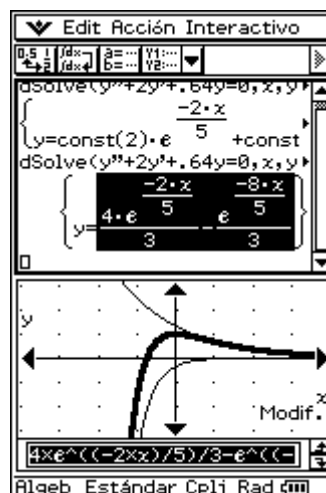
Representación con la ClassPad 300 ($-2\pi < x < 2\pi$, $x_{\text{scl}} = \pi/2$, $-\pi < y < \pi$, $y_{\text{scl}} = 1$). Una unidad sobre el eje de las x significa 1 ms; una unidad sobre el eje de las y , 1.5V.

Para solucionar la ecuación diferencial (solución general) se usó la siguiente orden:

dSolve(y'' + 2y' + .64y = 0, x, y),

con el resultado

$\{y = \text{const}(2) e^{-2x/5} + \text{const}(1) e^{-8x/5}\}$.



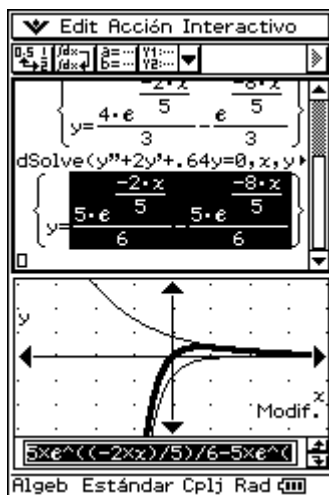
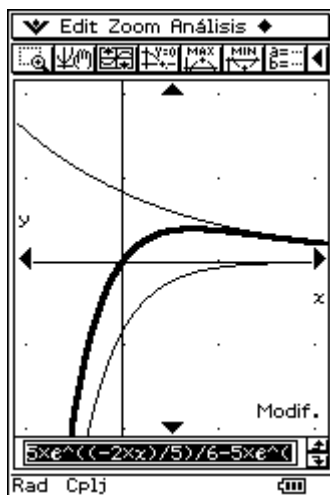
Se observa la conocida estructura de fórmula con las constantes de integración $C_k = \text{const}(k)$.

En el caso de que se desee resolver de inmediato el problema del valor inicial (PVI) pueden introducirse conjuntamente las CI en la orden dSolve:

$$\text{dSolve}(y'' + 2y' + .64y = 0, x, y, x = 0, y = 1, x = 0, y' = 0)$$

con el resultado

$$\{y = 4 \cdot e^{-2x/5} / 3 - e^{-8x/5} / 3\}.$$



Ahora tratamos la solución con las CI.

$$y_0 = y(0) = 0, \quad y'_0 = y'(0) = 1:$$

$y = 5/6 e^{-2x/5} - 5/6 e^{-8x/5}$, la llamada “**excitación por choque**”.

Una unidad sobre el eje de las x significa **1 ms**; sobre el eje de las y , **1.5V**. En cada caso se han mostrado las soluciones básicas y su suma.

$$(-2\pi < x < 2\pi, x_{\text{scl}} = \pi/2, -\pi < y < \pi, y_{\text{scl}} = 1)$$

12.2 Ejemplo numérico 2

$$R = 1 \text{ k}\Omega, \quad L = 0.5 \text{ H}, \quad C = 0.05 \text{ }\mu\text{F}, \quad f(t) = 0,$$

ecuación diferencial homogénea lineal con coeficientes $2\delta = 2 \cdot 10^3 / \text{sec}$, $\omega_0^2 = 40 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$ (oscilación eléctrica libre amortiguada, subamortiguación $\delta < \omega_0$)

$$d^2 y / dt^2 + 2/ms \, dy / dt + 40/ms^2 \, y = 0,$$

$$\text{con } x = t/ms: \quad d^2 y / dx^2 + 2dy / dx + 40y = 0.$$

$$\text{Ecuación característica: } \lambda^2 + 2\lambda + 40 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm j \cdot \sqrt{39}.$$

$$\text{Solución general: } y = (\overline{C_1} e^{j \cdot \sqrt{39} \cdot x} + \overline{C_2} e^{-j \cdot \sqrt{39} \cdot x}) e^{-x}$$

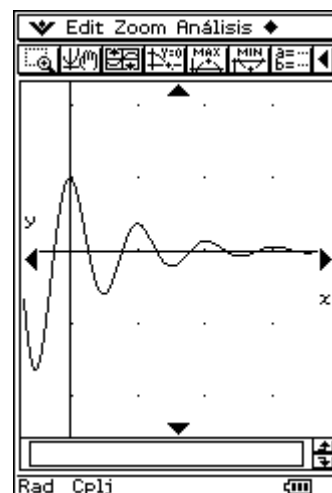
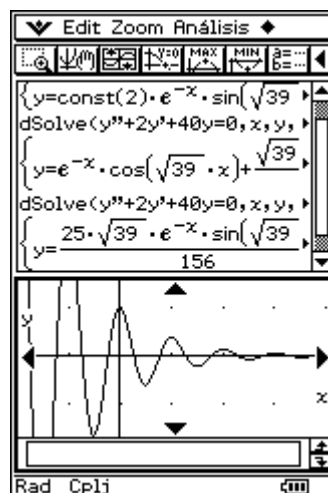
$$\text{real: } y = (C_1 \cos(\sqrt{39} \cdot x) + C_2 \sin(\sqrt{39} \cdot x)) e^{-x}.$$

En la página siguiente encontramos la solución especial con las CI: $y_0 = y(0) = 1, \quad y'_0 = y'(0) = 0$

y el valor aproximado $\sqrt{39} \approx 2\pi$ ($\sqrt{39} = 6.245$ y $2\pi = 6.283$).

$$y = e^{-x} (1 \cdot \cos(2\pi x) + 1/2\pi \cdot \sin(2\pi x))$$

$$\approx 1,01 \cdot e^{-x} \cdot \cos(2\pi x - \pi/20)$$



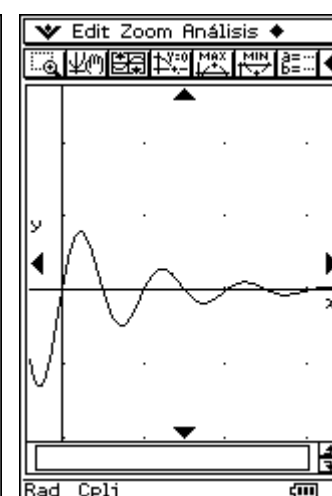
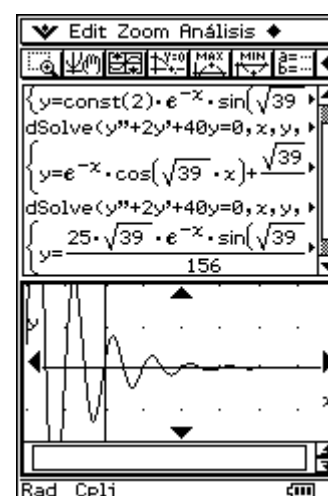
Gráficas de una subamortiguación

Solución especial con las CI:

$y_0 = y(0) = 0$, $y'_0 = y'(0) = 25/4$ y el valor aproximado $\sqrt{39} \approx 2\pi$ ($\sqrt{39} = 6.245$ y $2\pi = 6.283$).

$$y = e^{-x} (0 \cdot \cos(2\pi x) + 1,0008 \cdot \sin(2\pi x))$$

$$\approx 1 \cdot e^{-x} \cdot \sin(2\pi x)$$



12.3 Ejemplo numérico 3

$R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, $C = 2 \mu\text{F}$, $f(t) = 0$,

ecuación diferencial homogénea lineal con coeficientes $2\delta = 2 \cdot 10^3 / \text{sec}$, $\omega_0^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$ (oscilación eléctrica libre amortiguada, amortiguación crítica aperiódica $\delta = \omega_0$)

$$d^2 y / dt^2 + 2/ms dy / dt + 1/ms^2 y = 0,$$

con $x = t/ms$: $d^2 y / dx^2 + 2dy / dx + y = 0$.

Ecuación característica: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$,

$$\lambda_{1,2} = -1.$$

Solución general: $y = (C_1 x + C_2) e^{-x}$

Solución especial con las CI:

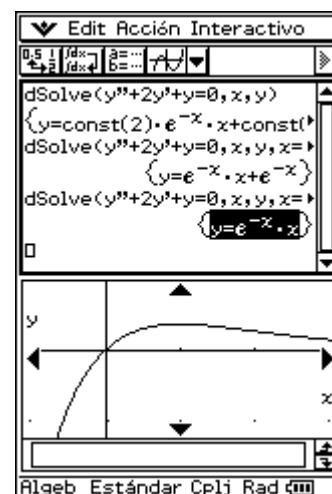
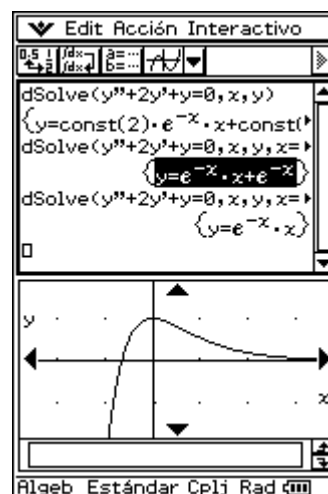
$$y_0 = y(0) = 1, y'_0 = y'(0) = 0$$

$$y = (1 \cdot x + 1) e^{-x}$$

Solución especial con las CI:

$$y_0 = y(0) = 0, y'_0 = y'(0) = 1$$

$$y = x \cdot e^{-x} \text{ "amortiguación crítica"}$$



12.4 Recomposición de una Ec. Dif. no homogénea a la correspondiente Ec. Dif. homogénea

La ecuación diferencial no homogénea $d^2y/dt^2 + 2\delta dy/dt + \omega_0^2 y = \omega_0^2 f(t)$ donde $f(t) = 0$ para $t < 0$, y $f(t) = 1$ para $t \geq 0$ (función de escalón unitario), con las condiciones iniciales $y_0 = y(0) = 0$, $y'_0 = y'(0) = 0$, tiene obviamente la solución particular $y_{\text{part}}(t) = \text{const.} = f(t) = 1$ (para $t \geq 0$). Mediante la sustitución (transformación): $y = -u + y_{\text{part}} = 1 - u$ (para $t \geq 0$), la ecuación diferencial no homogénea pasa a ser la ecuación diferencial homogénea

$$d^2(1-u)/dt^2 + 2\delta d(1-u)/dt + \omega_0^2(-u) = 0,$$

$$\text{o sea } d^2u/dt^2 + 2\delta dy/dt + \omega_0^2 u = 0$$

con las condiciones iniciales (para $t \geq 0$) $u_0 = u(0) = -y(0) + y_{\text{part}} = 1$, $u'_0 = u'(0) = 0$, cuya solución se puede encontrar en páginas anteriores.

Se designan como $u = y_{\text{hom}}$ las soluciones de la ecuación diferencial homogénea dada allí para las CI $y_0 = y(0) = 1$, $y'_0 = y'(0) = 0$, por tanto la solución de la ecuación diferencial no homogénea se expresa:

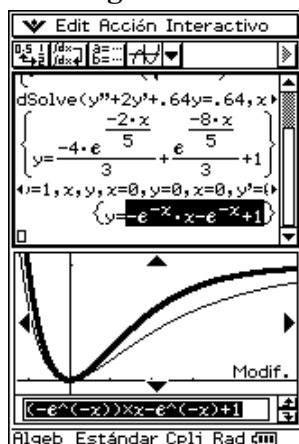
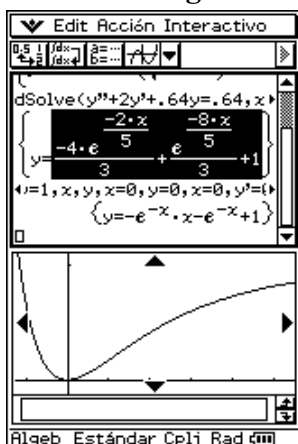
$$y = -y_{\text{hom}} + y_{\text{part}} = -y_{\text{hom}} + 1.$$

Sugerencia:

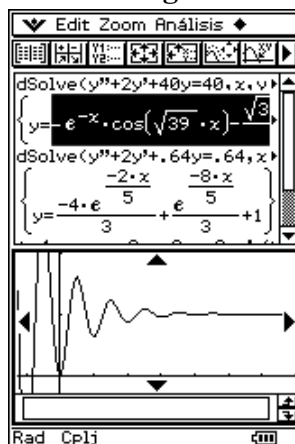
Si y_{hom} es la solución del PVI $d^2y/dt^2 + 2\delta dy/dt + \omega_0^2 y = 0$, $y_0 = y(0) = 1$, $y'_0 = y'(0) = 0$, entonces $-y_{\text{hom}}$ es la solución para $d^2y/dt^2 + 2\delta dy/dt + \omega_0^2 y = 0$, $y_0 = y(0) = -1$, $y'_0 = y'(0) = 0$, y viceversa.

En estos ejemplos las curvas solución se acercan asintóticamente al “Valor final” $y_{\text{part}} = 1$:

Sobreamortiguación y Amortiguación crítica:



Subamortiguación:



Sugerencia: La solución propia de las ecuaciones diferenciales se obtuvo en el menú de la aplicación Principal de la ClassPad 300 mediante la orden **dSolve(...)**; véase el manual de instrucciones, página 2-7-39f. El gráfico se generó igualmente en el menú principal, arrastrando con el lápiz a la ventana gráfica el correspondiente término de la fórmula marcado en negro (“**Drag and Drop**”-“Arrastrar y soltar”)

12.5 Superposición de ondas, pulsaciones

La pulsación es un ejemplo simple adecuado de superposición de ondas de frecuencias diferentes; se origina al sumarse dos oscilaciones cuyas frecuencias tienen sólo una diferencia insignificante:

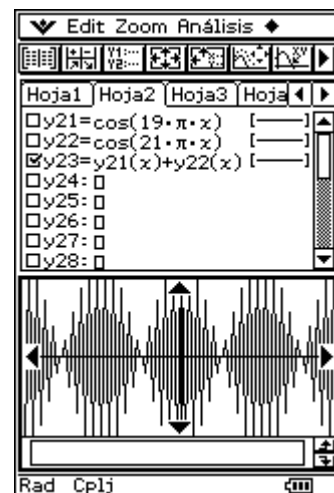
$$u_1 = \hat{u} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t), \quad u_2 = \hat{u} \cdot \cos(\omega_2 \cdot t), \quad \text{donde } \omega_1 = \omega - \Delta\omega/2, \quad \omega_2 = \omega + \Delta\omega/2.$$

Entonces es

$$u_1 + u_2 = \hat{u} \cdot (\cos(\omega_1 \cdot t) + \cos(\omega_2 \cdot t)) = 2\hat{u} \cdot \cos(t \cdot \Delta\omega/2) \cdot \cos(t \cdot \omega).$$

Ejemplo numérico

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 9.5 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 2\pi \cdot 10.5 \text{ Hz}, \quad \hat{u} = 1 \text{ V} \quad \text{con } x/t = 1 \text{ Hz}:$$



Ejercicios

12.1 Se busca la solución $x(t)$ del problema del valor inicial $d^2x/dt^2 + \omega_0^2 x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = x_0$, con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

(Oscilación libre, no amortiguada, de un oscilador de muelle-masa con masa m y constante de muelle k)

12.2 Se trata de resolver el problema del valor inicial

$$d^2x/dt^2 + 2\delta dx/dt + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = x_0,$$

con $\delta = r/(2m)$ y $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

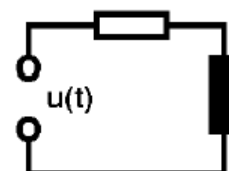
$x(t)$ describe aquí la desviación de un sistema de muelle-masa en el caso de oscilación libre amortiguada (masa m , factor de amortiguación r , constante de muelle k). Rige además $0 < \delta < \omega_0$ (amortiguación débil).

12.3 La ecuación diferencial para la corriente $i(t)$ en el circuito eléctrico RL, con resistencia variable $R = R(t)$ es $L \cdot di/dt + R(t) \cdot i = u(t)$

Se busca $i(t)$ para $u(t) = u_0$, $R(t) = 1/(1+t)$. La condición inicial es $i(0) = 0$.

12.4 Se trata de resolver la ecuación diferencial $L \cdot di/dt + R \cdot i = u(t)$ para la corriente $i(t)$ en el circuito eléctrico RL. En el instante $t = 0$ el circuito está sin corriente. Determine $i(t)$ para

a) $u(t) = u_0$ y b) $u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega t)$.

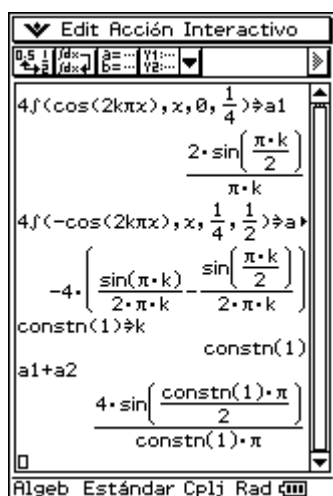


13 Aplicación práctica 2

(Serie de Fourier, oscilación rectangular y en diente de sierra, sucesión de pulsos estroboscópicos)

¿Cómo se calcula el polinomio trigonométrico para una oscilación rectangular?

13.1 Ejemplo1: Oscilación rectangular



$$f(t) = f(t + T) = \begin{cases} +1 & \text{si } -T/4 \leq t < T/4 \\ -1 & \text{si } T/4 \leq t < 3T/4 \end{cases}$$

A causa de su simetría con el eje y (función par), se representa esta función aproximadamente mediante una serie de cosenos (finita).

Pista para iniciados

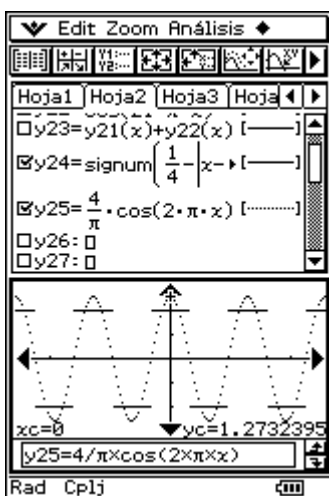
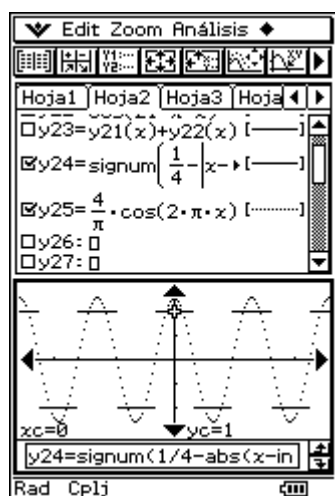
El coeficiente de Fourier a_k es calculado en la imagen de la izquierda como suma $a1+a2$, donde para el índice k se usa la variable de sistema entera **constn(1)**. Así, la ClassPad 300 reconoce por ejemplo que $\sin(k \cdot \pi) = \sin(\text{constn}(1) \cdot \pi) = 0$ y simplifica el resultado

$$f(t) \approx s_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \cos(k \cdot \omega_1 \cdot t) \text{ donde } \omega_1 = 2\pi/T \text{ y } a_k = 4/k\pi \cdot \sin(k\pi/2)$$

es decir, $a_1 = 4/\pi$, $a_2 = 0$, $a_3 = -4/(3\pi)$, $a_4 = 0$, $a_5 = 4/(5\pi)$, ...

La primera imagen muestra $f(t)$ y la “oscilación básica” $4/\pi \cdot \cos(\omega_1 \cdot t)$.

Con ello se establece si $t/T = x$, entonces $\omega_1 = 2\pi \cdot t/T$ resulta $2\pi x$.

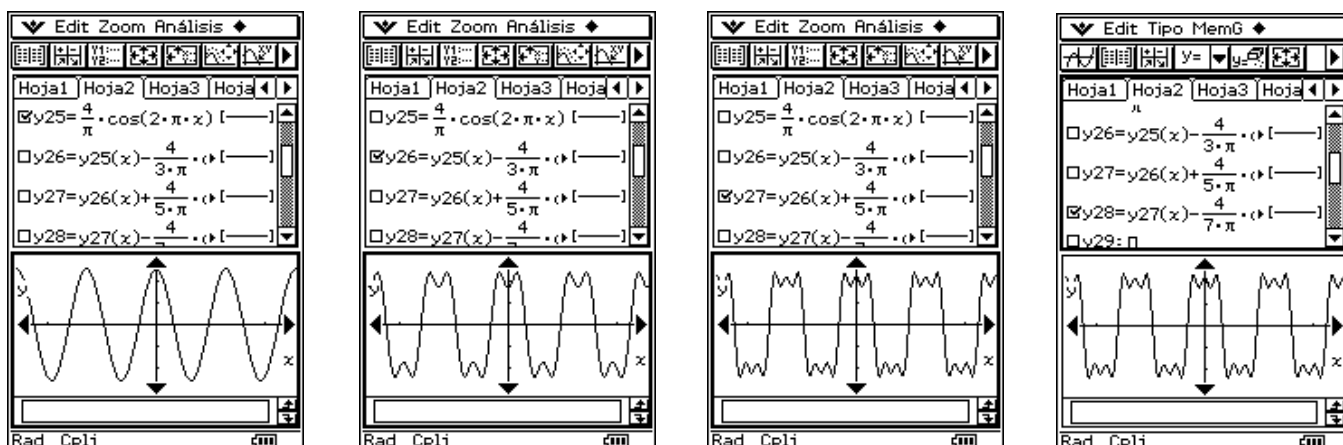


La unidad sobre el eje de las x de todas las siguientes imágenes representa, pues, una duración de período T sobre el eje temporal. Para la representación formal de la función continua de la derecha

$$f(t/T) = \text{signum}(1/4 - |x - \text{intg}(x + 1/2)|)$$

se usan las funciones **signum()** y **intg()** (manual de instrucciones, p 2-4-6). Para evitar gráficos verticales se ha trazado $f(t/T) = f(x)$ en el modo **Marcación de puntos**.

En las siguientes imágenes se muestra cómo la función de aproximación $s_n(t)$ mejora gracias a la inclusión de armónicos superiores. Cuantas más oscilaciones parciales se incluyen en la representación, mayor resulta la similitud con la oscilación rectangular.



13.2 Ejemplo 2: Oscilación en diente de sierra

$$f(t) = f(t + T) = 2t/T \quad \text{si} \quad -T/2 \leq t < T/2.$$

A causa de la simetría de puntos al origen de coordenadas (función impar) se representa esta función aproximadamente mediante una serie de senos. Cálculo (integración) de b_k en el menú principal.

$$f(t) \approx s_n(t) = \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\omega_1 t), \quad \text{donde} \quad \omega_1 = 2\pi/T \quad \text{y}$$

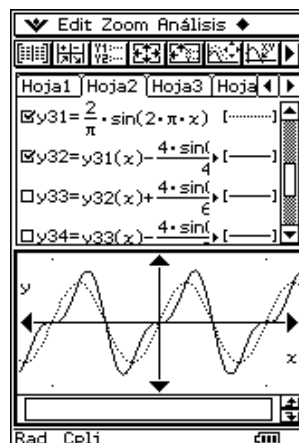
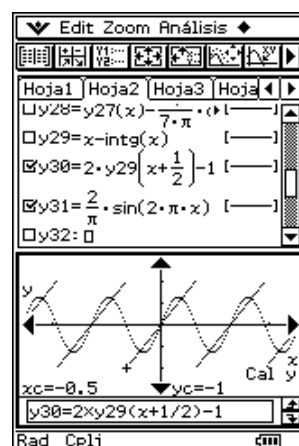
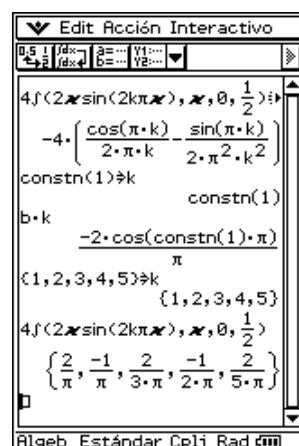
$$b_k = -2/k\pi \cdot \cos(k\pi) = 2/k\pi \cdot (-1)^{k+1}, \quad \text{es decir,}$$

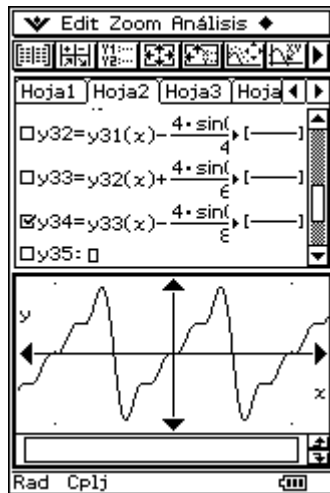
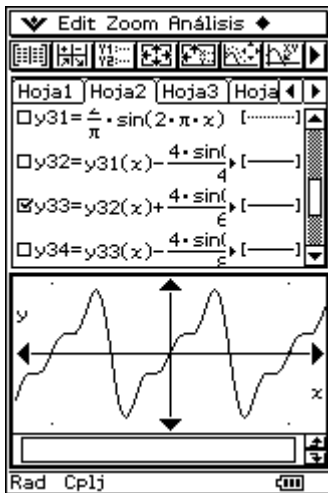
$$b_1 = 2/\pi, \quad b_2 = -1/\pi, \quad b_3 = 2/(3\pi), \quad b_4 = -1/(2\pi), \quad b_5 = 2/(5\pi), \dots$$

En la primera imagen se aprecia junto a $f(t)$ la “oscilación básica” de $2/\pi \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) = 2/\pi \cdot \sin(2\pi x)$, del mismo modo que la “oscilación básica” de la oscilación rectangular. Para la representación formal de la función continua de la derecha $f(t)$ se ha usado la función $\text{intg}()$ (manual de instrucciones p. 2-4-6). Para evitar gráficos verticales se volvió a trazar $f(t/T)=f(x)$ en modo Marcación de puntos. En las siguientes imágenes se reflejan la “fórmula básica” así como las primeras tres superposiciones.

También aquí el seno en $s_1(x)$ resulta claramente más parecido al diente de sierra mediante superposición.

$$\text{Representado: } y31(x) = s_1(x) \quad \text{y} \quad y32(x) = s_2(x)$$





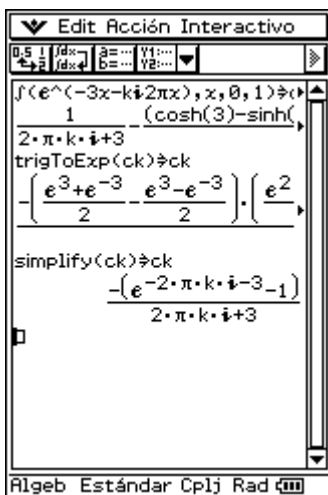
Con la segunda superposición vuelve a mejorar claramente:

Representado: $y_{33}(x) = s_3(x)$

Y con las tres superposiciones, la curva toma un aspecto muy similar al diente de sierra.

Representado: $y_{34}(x) = s_4(x)$

13.3 Ejemplo 3: Oscilación en diente de sierra exponencial



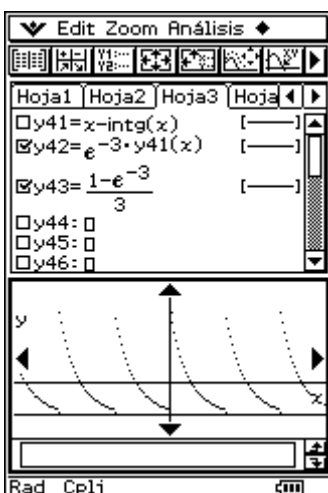
$f(t) = f(t + T) = e^{-t/\tau}$ para $0 < t \leq T$. Para τ elija el valor $T/3$.

Ya que esta función apenas muestra simetría en t (ni función par ni impar), debe representarse mediante una serie de elementos de senos y de cosenos. La representación mediante la **Serie de Fourier compleja** es teóricamente más sencilla y habitual en la tecnología moderna de las noticias.

$$f(t) \approx s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \vec{c}_k e^{j\omega_1 k t} \quad \text{donde de nuevo rige } \omega_1 = 2\pi/T$$

y en nuestro ejemplo se usa la fórmula

$$\vec{c}_k = (\tau/T) \cdot (1 - e^{-T/\tau}) / (1 + j \cdot k \cdot \omega_1 \cdot T) = (1/3) \cdot (1 - e^{-3}) / (1 + j \cdot 2k\pi/3).$$



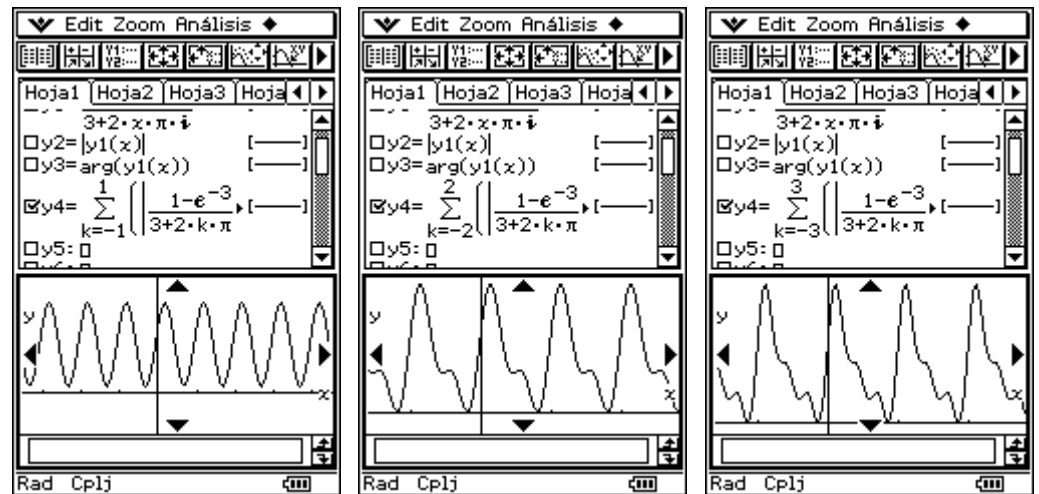
El cálculo (integración) del valor complejo $\vec{c}_k$ se ha obtenido de nuevo en el menú de la aplicación **Principal (Menú Principal)**, donde previamente hay que borrar la variable k en el administrador de variables, siempre que ésta tenga una asignación procedente de cálculos anteriores.

Sugerencia : $e^{-2k\pi j} = 1$ para k entera

El elemento $\vec{c}_0 = (1 - e^{-3})/3$ constituye la componente directa cuyo dibujo aparece incluido en la imagen de curva adjunta. $f(t)$ ha sido trazado en modo **Marcación de puntos** para evitar gráficos verticales.

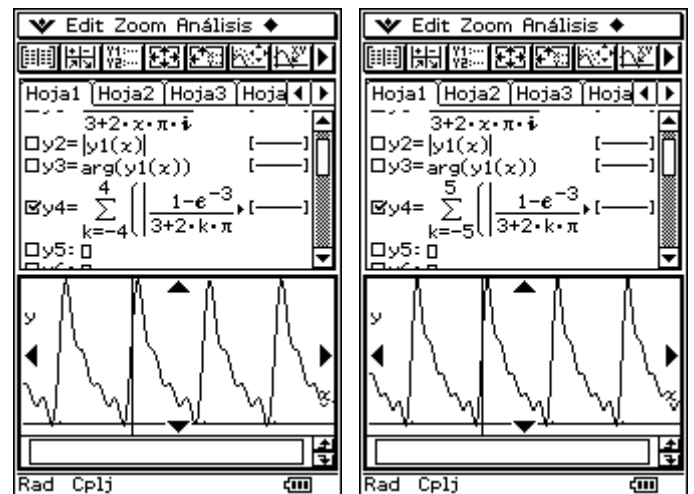
Ya que la utilización de la función exponencial compleja puede conducir a tiempos de cálculo muy largos, se debe reducir a representación real de $s_n(t)$:

$$f(t) \approx s_n(t) = \vec{c}_0 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n |\vec{c}_k| \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad \text{con } \varphi_k = \arg(\vec{c}_k)$$



Entonces se aumenta el número de oscilaciones básicas (hasta $n = 5$):

En los programas de las carreras de ingeniería, sucesiones de imágenes como las aquí mostradas deben sustituir la demostración matemática estricta para que $f(t)$ pueda ser aproximada con exactitud mediante un número suficientemente alto de oscilaciones parciales arbitrarias en $s_n(t)$



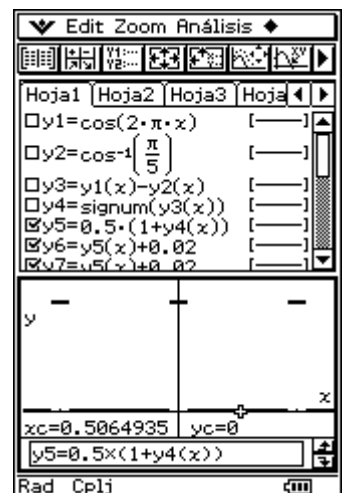
13.4 Ejemplo 4: Sucesión de pulsos estroboscópicos

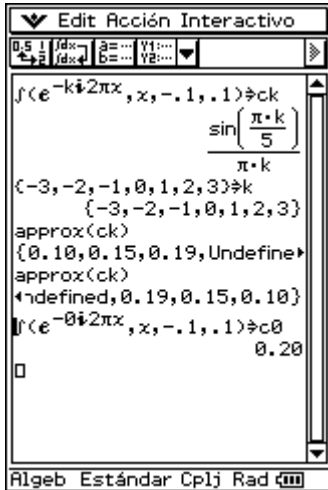
$$f(t) = f(t + T) = \begin{cases} 0 & \text{si } -T/2 \leq t < -T_T/2 \\ 1 & \text{si } -T_T/2 \leq t < T_T/2 \\ 0 & \text{si } T_T/2 \leq t < T/2 \end{cases}$$

T_T es la “duración de pulso“, T_T / T es el “comportamiento de pulso“. Para la representación de $f(t)$ se usa la fórmula

$$f(t) = (1 + \text{signum}(\cos(2\pi x) - \arccos(\pi/5)))/2$$

y se elige el modo punto para la representación gráfica para evitar gráficos verticales. Ejemplo: $T_T / T = 1/5$ (y $\omega_1 = 2\pi / T$).



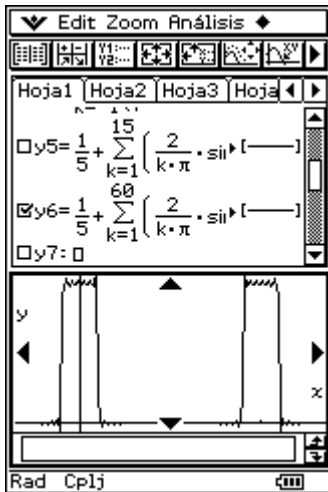
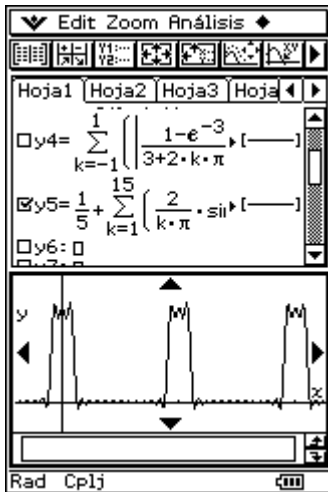


Pista para iniciados

En la imagen precedente se ha trazado la función de salida (“sucesión de pulsos estroboscópicos”) varias veces una sobre otra con desplazamiento menor alrededor de la tolerancia $\pm 0,02$ para poder dibujar la representación gráfica en modo punto “más gruesa”.

$f(t) \approx s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \vec{c}_k e^{j\omega_1 k t}$, donde nuevamente $\omega_1 = 2\pi/T$, y en nuestro ejemplo ahora se calcula la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} \vec{c}_k &= (T_T/T) \cdot \sin(k\omega_1 T_T/2) / (k\omega_1 T_T/2) \\ &= \sin(k\pi T_T/T) / (k\pi) = \sin(k\pi/5) / (k\pi), k \neq 0 \end{aligned}$$

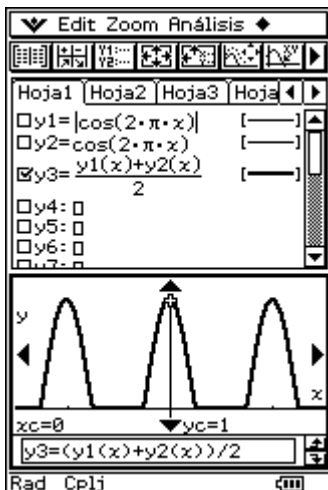


Los coeficientes $\vec{c}_k$ vuelven a ser reales en este ejemplo (cálculo en el menú de la aplicación principal prestando atención a que $\vec{c}_0 = 1/5$ debe ser integrado adicionalmente para evitar una división entre 0)

Las imágenes siguientes muestran el polinomio de Fourier con $n = 15$ y $n = 60$ oscilaciones parciales respectivamente: dado que la introducción de tantos sumandos supone tanta “labor de teclado”, se ha utilizado el símbolo de la suma, que se encuentra en el teclado virtual, en el menú **mth**, en **CALC** (manual de instrucciones p. 1-6-9, Conjunto de

teclas CALC)

Ejercicios



13.1 Se busca el polinomio de Fourier $s_n(t)$ para la “rectificación de una vía” $f(t) = (\cos(2\pi t) + |\cos(2\pi t)|)/2$. Obtenga tanto la serie de Fourier real como la compleja.

13.2 Obtenga la serie de Fourier real y la compleja para la curva trapezoidal $f(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} u_0 \cdot t / (T/6) & si \quad -T/6 \leq t < T/6 \\ u_0 & si \quad T/6 \leq t < T/3 \\ -u_0 \cdot (t - T/2) / (T/6) & si \quad T/3 \leq t < 2T/3 \\ -u_0 & si \quad 2T/3 \leq t < 5T/6 \end{cases}$$

14 Aplicación práctica 3

(Espectro de líneas, oscilación en diente de sierra, sucesión de pulsos estroboscópicos)

¿Cómo se representa gráficamente un espectro de líneas (complejo) mediante el menú de sucesiones numéricas?

14.1 Ejemplo 1: Oscilación en diente de sierra

El punto de partida es el ejemplo2 (Oscilación en diente de sierra) de la p. 83 con los coeficientes de Fourier reales $b_k = -2/(k\pi) \cdot \cos(k\pi) = 2/(k\pi) \cdot (-1)^{k+1}$.

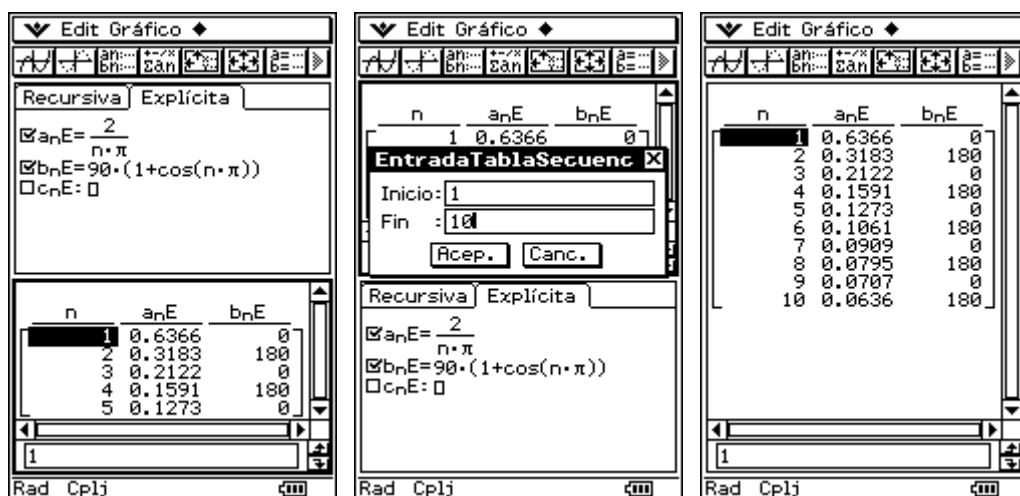
Las amplitudes y las fases de las oscilaciones parciales se representan gráficamente mediante espectros de líneas. En nuestro ejemplo, las amplitudes de las oscilaciones parciales forman la sucesión numérica:

$$|b_k| = 2/(k\pi), \quad k = 1, 2, \dots$$

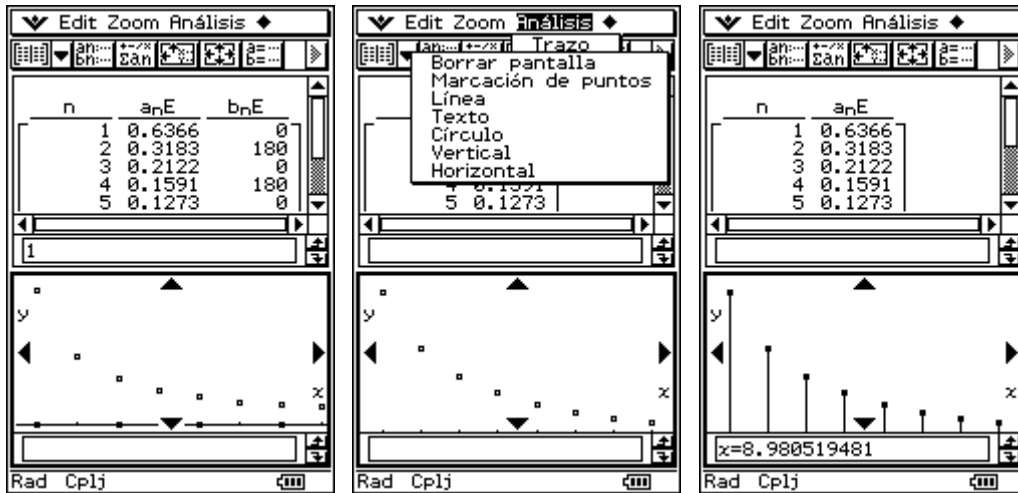
Los diferentes signos se expresan mediante los valores de fase:

$$\varphi_1 = 0^\circ, \varphi_2 = 180^\circ, \varphi_3 = 0^\circ, \varphi_4 = 180^\circ, \dots, \varphi_k = 90^\circ \cdot (1 + \cos(k\pi)) = 90^\circ \cdot (1 + (-1)^k)$$

Para la representación gráfica de tales sucesiones, la ClassPad 300 ofrece el **Menú-Secuencia** (Manual de instrucciones, véase p.6-1-1 y sig.), con cuya ayuda se han producido las siguientes imágenes:



Las líneas verticales han sido añadidas manualmente mediante el menú **Análisis, Esbozo (Línea)**:



14.2 Ejemplo 2: Oscilación en diente de sierra exponencial

El punto de partida es el ejemplo 3 (oscilación en diente de sierra exponencial) de la página 84 con los coeficientes de Fourier complejos $\vec{c}_k = (1 - e^{-3}) / (3 + j \cdot 2k\pi)$.

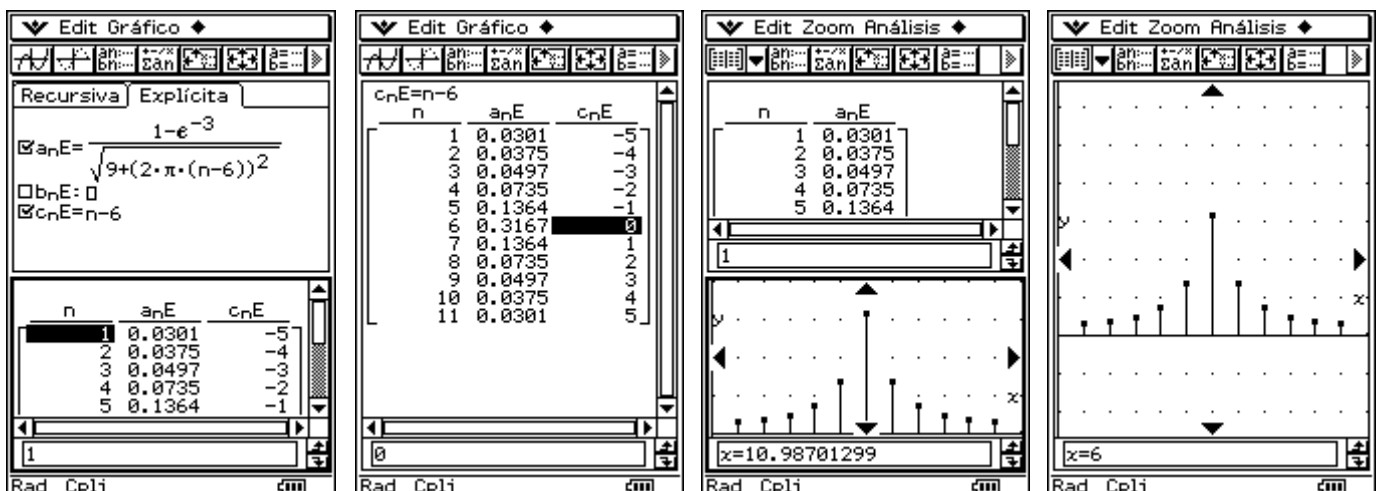
Los módulos $|\vec{c}_k|$ y las fases φ_k de las oscilaciones parciales constituyen sucesiones numéricas y son representados gráficamente mediante el menú **Secuencia** de la ClassPad 300 como **Espectros de líneas** complejos. En este ejemplo las amplitudes de las oscilaciones parciales constituyen la serie numérica:

$$|\vec{c}_k| = (1 - e^{-3}) / |3 + j \cdot 2k\pi| = (1 - e^{-3}) / \sqrt{9 + (2k\pi)^2}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Los valores de fase son los argumentos $\varphi_k = \arg(\vec{c}_k)$ de los valores complejos $\vec{c}_k$:

$$\varphi_k = \arg(\vec{c}_k) = \arg((1 - e^{-3}) / (3 + j \cdot 2k\pi)) = -\arctan(2k\pi / 3).$$

Dado que el menú **Secuencia** no permite valores negativos para el índice, se representa el índice k ($-5 \leq k \leq 5$) mediante $c_nE = k = n - 6$.

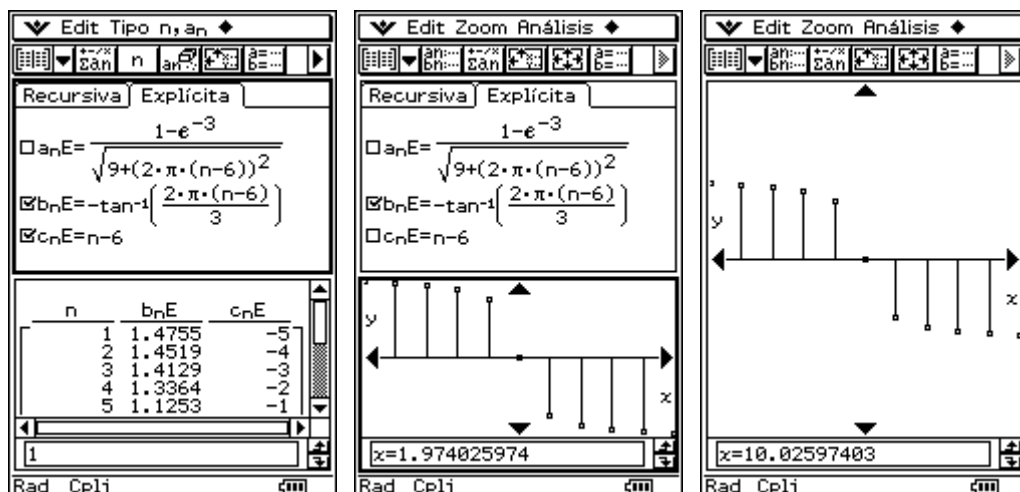


Serie de imágenes superior:

Espectro de amplitudes como secuencia a_nE .

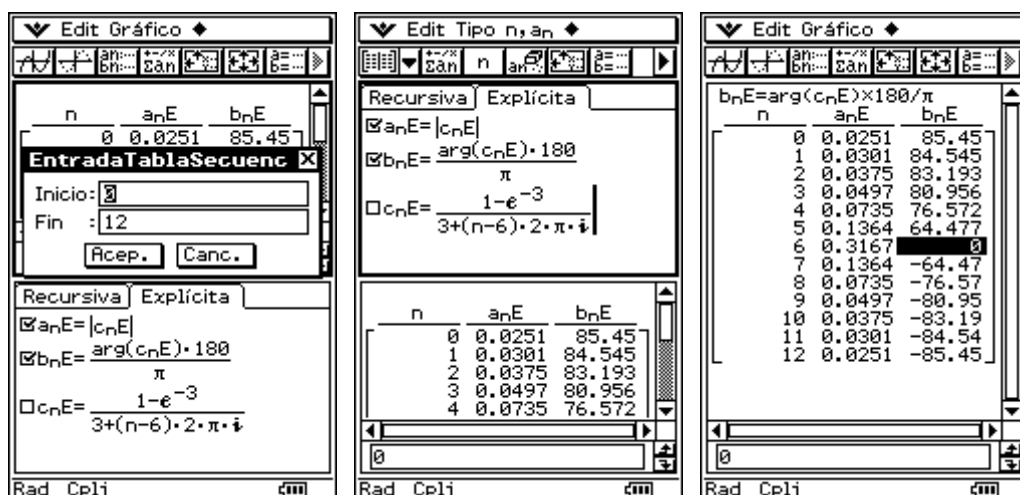
Serie de imágenes inferior:

Espectro de fases como secuencia b_nE .



El espectro de líneas complejo se designa también como “Representación de la función $f(t)$ en el rango espectral”, y el cálculo y la representación de $s_n(t)$ como “Transformación inversa en rango temporal”.

Las siguientes imágenes muestran una vez más la tabulación de los módulos y ángulos de fase (en grados sexagesimales):



La ventana de entrada para el rango del índice se abre pulsando sobre el icono

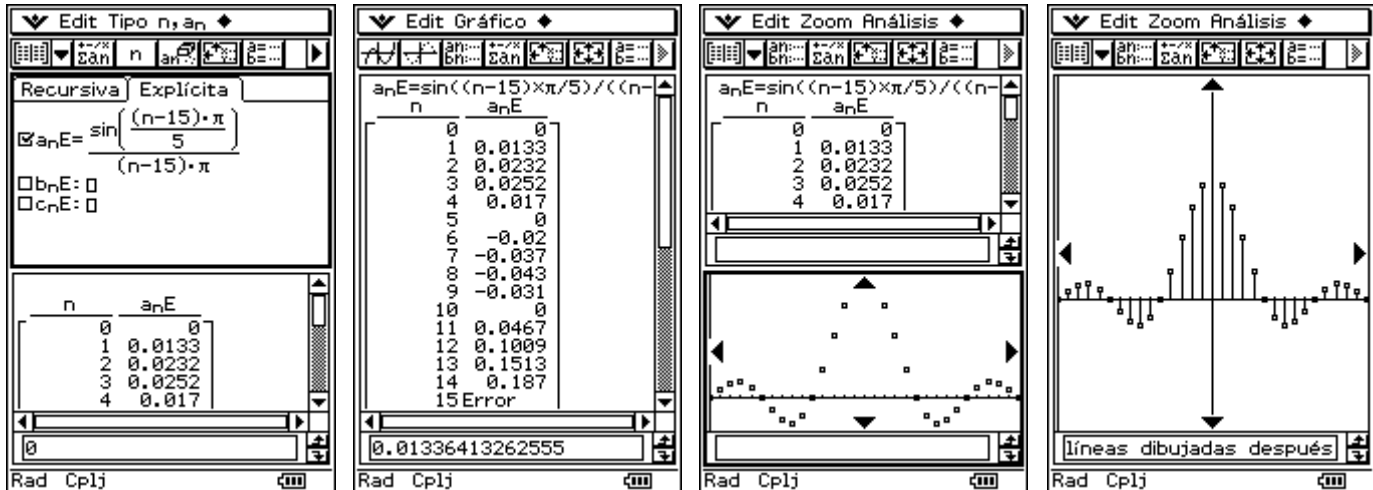


arriba a la derecha.

14.3 Ejemplo 3: Sucesión de pulsos estroboscópicos

El punto de partida es el ejemplo 4 (sucesión de pulsos estroboscópicos) de la página 85 y sig. con los coeficientes de Fourier reales $\vec{c}_k = \sin(k\pi/5)/(k\pi)$, $k = \dots, -2, -1, 1, 2, \dots$ y $\vec{c}_0 = 1/5$.

Representación de esta sucesión ($\vec{c}_k$) en el **Menú-Secuencia** (desplazamiento del índice $k = n - 15$):



Durante la tabulación, aparece **Error** para el valor $\vec{c}_0 = 0,2000$, ya que este valor no puede obtenerse mediante la secuencia numérica y debe ser calculado aparte. Las líneas verticales se añaden de nuevo manualmente mediante el menú **Análisis, Esbozo (Línea)**.

Ejercicios

14.1 Obtenga el espectro de líneas para la curva trapezoidal $f(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} u_0 \cdot t / (T/6) & \text{si } -T/6 \leq t < T/6 \\ u_0 & \text{si } T/6 \leq t < T/3 \\ -u_0 \cdot (t - T/2) / (T/6) & \text{si } T/3 \leq t < 2T/3 \\ -u_0 & \text{si } 2T/3 \leq t < 5T/6 \end{cases}$$

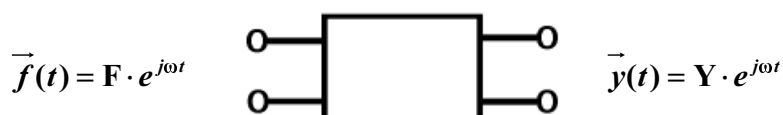
Sugerencia: Utilice el resultado del problema 13.2 (coeficientes de Fourier).

15 Otras aplicaciones en la tecnología de las noticias

(Transmisión de señales periódicas, Filtrado)

¿Cómo se modela matemáticamente y se calcula un filtrado de paso alto?

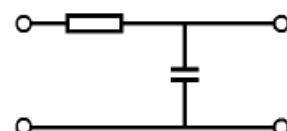
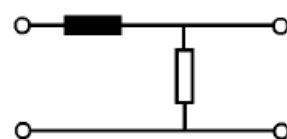
15.1 Función de transmisión compleja



Las funciones de transmisión describen el comportamiento entre la tensión de salida y la de entrada en un elemento de transmisión lineal, en el caso en que la tensión de entrada sea una tensión alterna de oscilación armónica, que se representa simbólicamente mediante un fasor complejo:

Tensión de entrada $\vec{f}(t) = F \cdot e^{j\omega t}$. Tensión de salida $\vec{y}(t) = Y \cdot e^{j\omega t}$.

Entonces la función compleja de transmisión del cociente es $H(j\omega) = \vec{y}(t) / \vec{f}(t)$.



Ejemplo para elemento de paso bajo (ω_c es la frecuencia crítica del filtro)

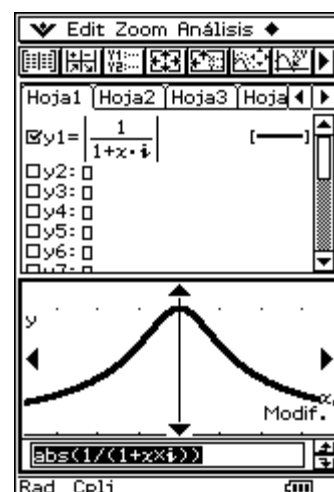
$$H(j\omega) = R / (R + j\omega L) = 1 / (1 + j\omega / \omega_c),$$

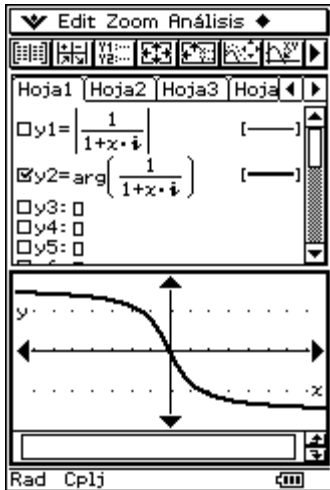
donde $\omega_c = R / L$.

$$H(j\omega) = (1 / (j\omega C)) / (R + 1 / (j\omega C)) = 1 / (1 + j\omega / \omega_c),$$

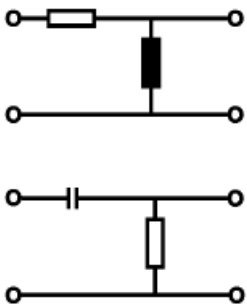
donde $\omega_c = 1 / RC$.

Con $\omega / \omega_c = x$, ambas funciones de transmisión tienen la forma $1 / (1 + jx)$, cuyo módulo y fase son sencillos de graficar con la ClassPad 300:





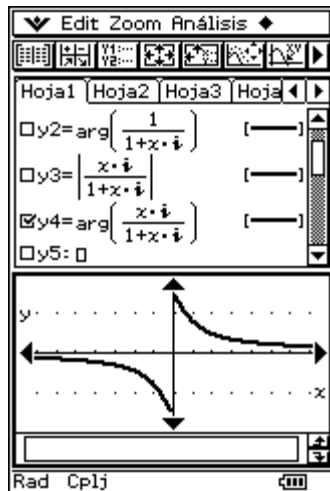
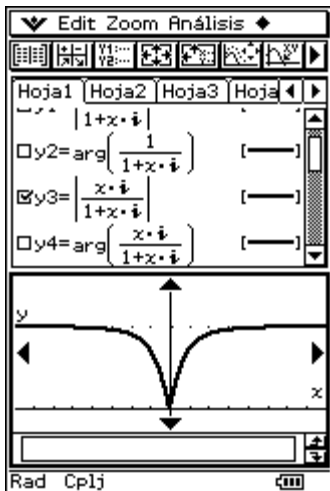
Todos los ángulos se muestran en RAD. **ymin** y **ymax** corresponden respectivamente a -90° y a $+90^\circ$, y **yscl** a 15° . Una unidad sobre el eje de las x corresponde a un intervalo ω_c sobre el eje de las ω .



Ejemplos para elementos de paso alto

$$H(j\omega) = j\omega L(R + j\omega L) = (j\omega / \omega_c) / (1 + j\omega / \omega_c), \text{ donde rige } \omega_c = R/L.$$

$$H(j\omega) = R / (R + 1/j\omega C) = (j\omega / \omega_c) / (1 + j\omega / \omega_c), \text{ donde rige } \omega_c = 1/RC.$$



Con $\omega/\omega_c = x$ ambas funciones de transmisión tienen la forma $jx / (1 + jx)$, cuyo módulo y fase son fáciles de graficar con la ClassPad300:



Ejemplo para un elemento oscilatorio

(Circuito RCL: véase p 77 en el capítulo 12)

$$H(j\omega) = (1/(j\omega C)) / (1/(j\omega C) + j\omega L + R) = 1 / (1 - \omega^2 LC + j\omega RC)$$

Utilizamos las abreviaturas introducidas en la solución de la ecuación de onda:

$$H(j\omega) = 1 / (1 - \omega^2 LC + j\omega LC \cdot R/L) = 1 / (1 - \omega^2 / \omega_0^2 + j(2\delta / \omega_0) \cdot (\omega / \omega_0)),$$

con $2\delta = R/L$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$; véase p. 77 en el capítulo 12.

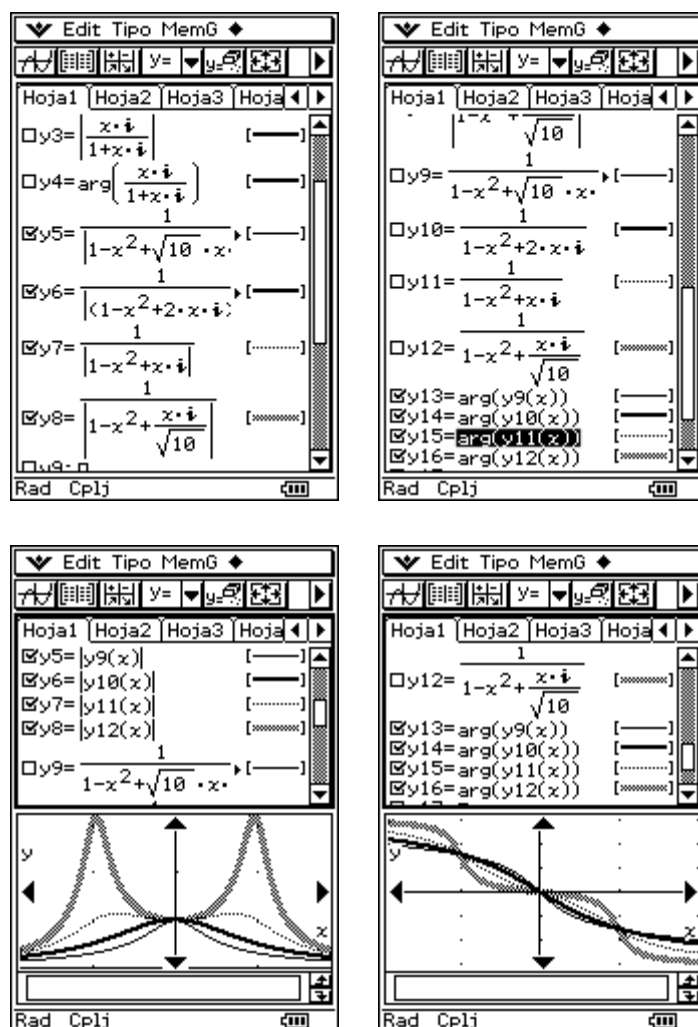
Con $\omega/\omega_0 = x$, esta función de transmisión tiene la forma $(1/(1-x+j(2\delta/\omega_0)*x))$, cuyo módulo y fase son fáciles de graficar con la ClassPad 300.

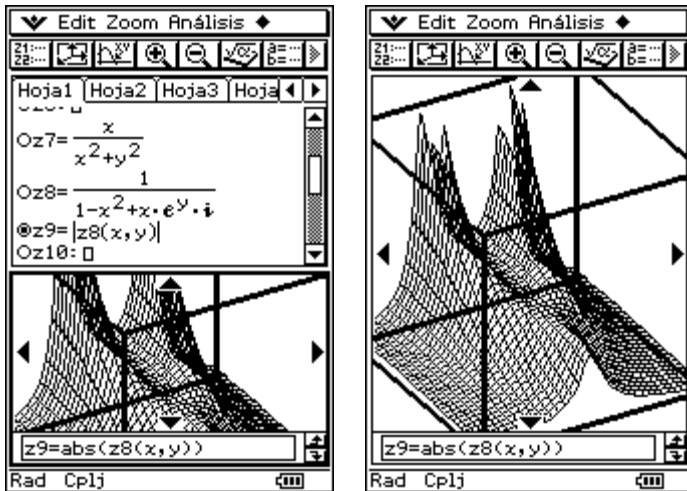
Como ejemplo numérico para el paso tratado antes, elegimos:

$R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 0.5 \text{ H}$, así pues $2\delta = R/L = 2 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1}$. Para C elegimos los valores numéricos:

1. $C = 5\mu\text{F}$, $\omega_0^2 = 0.4 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$, $2\delta/\omega_0 = \sqrt{10} > 2$, (Sobreamortiguación)
2. $C = 2\mu\text{F}$, $\omega_0^2 = 1 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$, $2\delta/\omega_0 = 2$, (Amortiguación crítica, cf. p. 79)
3. $C = 0.5\mu\text{F}$, $\omega_0^2 = 4 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$, $2\delta/\omega_0 = 1 < 2$, (Subamortiguación)
4. $C = 0.05\mu\text{F}$, $\omega_0^2 = 40 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-2}$, $2\delta/\omega_0 = 1/\sqrt{10} < 2$, (Subamortiguación, cf. p. 78)

Los módulos y las fases de las correspondientes funciones de transmisión son bien representables como familias de curvas:





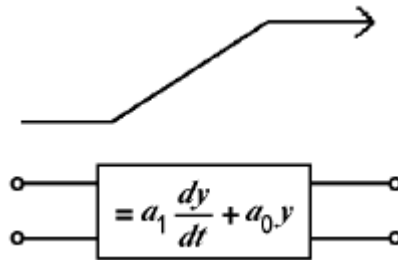
Una buena visualización se obtiene con una representación en perspectiva de la imagen de la superficie de $z = |H(j\omega)|$ como función de ambas variables, $x = \omega/\omega_c$ e $y = \ln(2\delta/\omega_0)$ (Gráfico 3D).

15.2 Transmisión de señales periódicas

Mediante la Serie de Fourier podemos ahora calcular la tensión de salida $y(t)$ de un elemento de transmisión lineal, también en el caso de que, aunque la tensión de entrada $f(t)$ sea periódica, no haya ya tensión alterna oscilatoria.

En el caso que la tensión de entrada se puede expresar mediante una serie de Fourier,

$$\vec{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{c}_k \cdot e^{j\omega_1 k t}$$



Entonces se fija también para la tensión de salida $y(t)$ una serie de Fourier.

$$\vec{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{d}_k \cdot e^{j\omega_1 k t}$$

Entonces se asigna a cada sumando de la tensión de entrada un sumando de la tensión de salida con el mismo fasor, cuya amplitud compleja $\vec{d}_k$ se relaciona con la correspondiente amplitud compleja $\vec{c}_k$ de la tensión de entrada exactamente igual que la amplitud de salida compleja Y lo hace con la amplitud de entrada F de la tensión de entrada oscilatoria armónica (cf también p.91):

A partir de $Y = F \cdot H(j\omega)$, se deduce $\vec{d}_k = \vec{c}_k \cdot H(jk\omega_1)$.

Cuando la relación entre $\vec{f}(t)$ e $\vec{y}(t)$ se describe mediante una ecuación diferencial, ésta representa su **solución en el rango de frecuencias**.

La transformación inversa en el rango temporal es, pues:

$$\vec{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vec{c}_k \cdot H(jk\omega_1) \cdot e^{jk\omega_1 t} \quad \text{con} \quad \vec{c}_k = |\vec{c}_k| \cdot e^{j\varphi_k}, \quad H(jk\omega_1) = |H(jk\omega_1)| \cdot e^{j\psi_k}.$$

$$y(t) \approx y_n(t) = \vec{c}_0 \cdot H(j0) + 2 \cdot \sum_{k=1}^n |\vec{c}_k| \cdot |H(jk\omega_1)| \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k + \psi_k)$$

Al realizar el trabajo práctico con la ClassPad 300, debe usarse esta forma real de la solución de aproximación, ya que el cálculo con fasores complejos, aunque en principio sea posible, en la aplicación a este tipo de problemas puede suponer tiempos de cálculo extremadamente largos.

Como ejemplo, para $H(j\omega)$ elegimos la función de transmisión (cf. p. 91 y siguientes)

Del paso bajo $H(j\omega) = 1/(1 + j\omega/\omega_c)$

Correspondientemente, del paso alto $H(j\omega) = (j\omega/\omega_c)/(1 + j\omega/\omega_c)$.

Para la frecuencia límite elegimos el valor $\omega_c = 2 \cdot \omega_1$, es decir, $\omega_1/\omega_c = 1/2$,

así resulta

$$H(jk\omega_1) = 1/(1 + jk/2) \quad (\text{paso bajo})$$

y correspondientemente

$$H(jk\omega_1) = (jk/2)/(1 + jk/2) \quad (\text{paso alto})$$

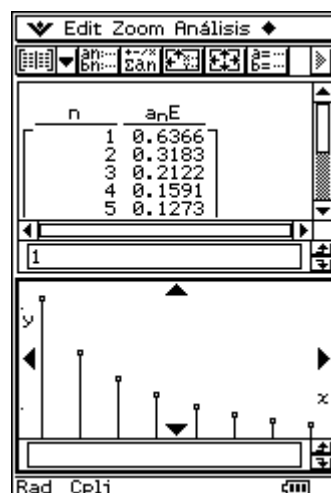
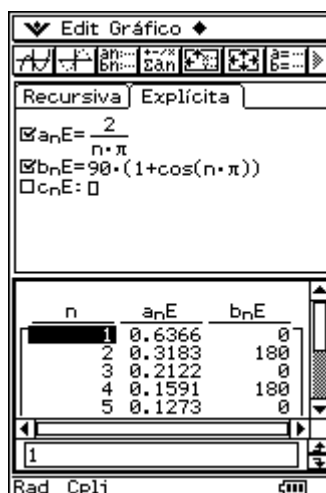
Filtrado de paso bajo de la oscilación en diente de sierra

La tensión de entrada se representa mediante una serie senoidal (función impar; cf. p.83, capítulo 13), cuyas amplitudes son

$$b_k = -2 \cdot \cos(k\pi)/(k\pi) = 2 \cdot (-1)^{k+1}/(k\pi)$$

y tienen los módulos $|b_k| = 2/(k\pi)$.

Representación como espectro de líneas en el menú de secuencia numérica, p. 87, cap. 14:

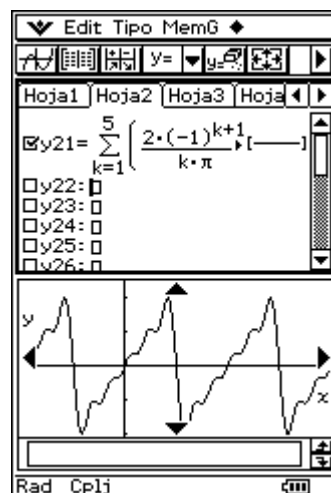


La suma de 5 oscilaciones parciales da la función de aproximación $s_5(t)$ para $f(t)$:

Mediante el filtrado de paso bajo, las oscilaciones parciales son amortiguadas tanto más cuanto más alta sea la frecuencia.

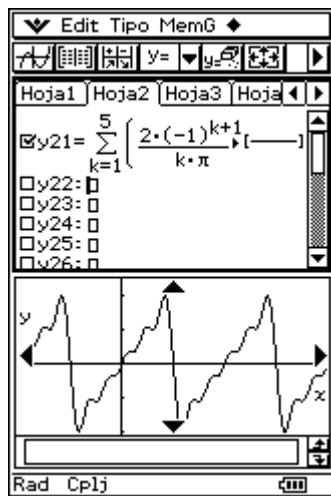
La tensión de salida tiene el espectro de líneas representado abajo (nos ceñimos aquí a los módulos $|d_k|$). En la transformación inversa, los b_k son multiplicados por $|H(jk\omega_1)|$, y el ángulo de fase de $H(jk\omega_1)$ se suma a las fases correspondientes.

Sugerencia: $\arg(1/(1 + jk/2)) = -\arg(1 + jk/2) = -\arctan(k/2)$.

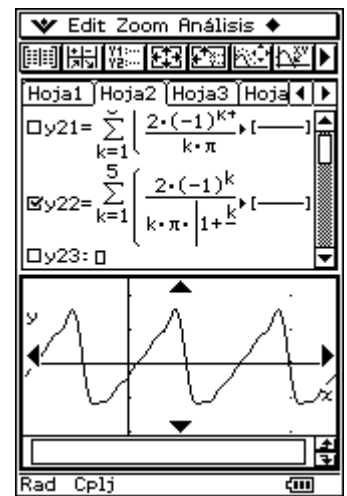
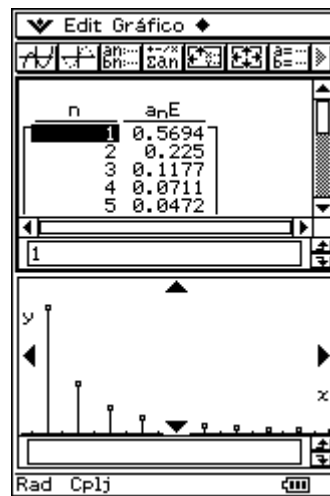
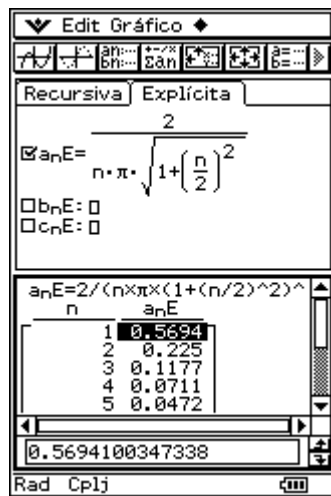


$$y(t) \approx y_5(t) = \sum_{k=1}^5 2 \cdot (-1)^{k+1} / (k\pi |1 + jk/2|) \cdot \sin(2k\pi t - \arg(1 + jk/2))$$

La función de aproximación $y_5(t)$ permite distinguir bien el efecto del filtrado de paso bajo, el redondeo y el “suavizado” de los picos. Por lo tanto ha disminuido la aproximación de la función de paso bajo $s_5(t)$.



$s_5(t)$ (Entrada)



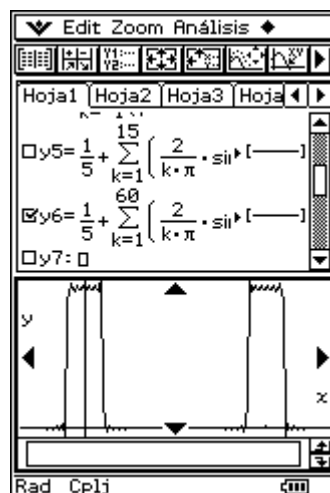
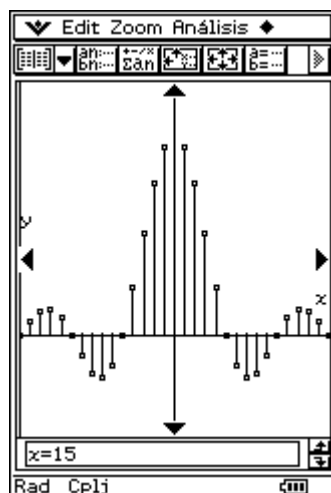
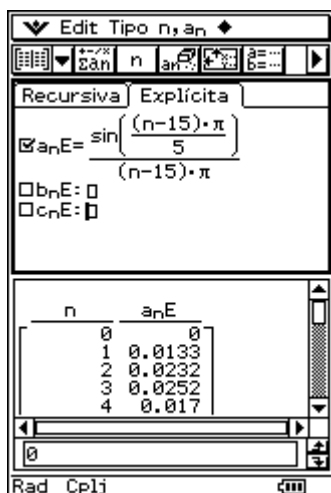
$y_5(t)$ (Salida)

Filtrado de paso bajo de la sucesión de pulsos estroboscópicos

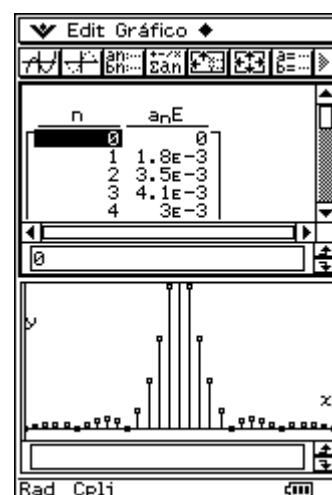
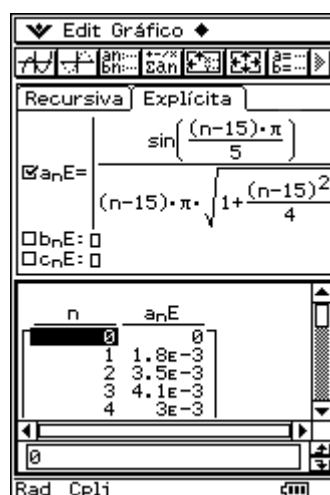
La tensión de entrada $f(t)$ se representa mediante una serie de Fourier, cuyos coeficientes c_k son todos reales: $c_k = (T_T/T) \cdot \sin(k\omega_1 T_T/2) / (k\omega_1 T_T/2)$, cf. p. 86, Capítulo13.

Representación como espectro de líneas en el menú Secuencia para: $T_T/T = 1/5$.

Como consecuencia, la adición de la componente directa con 15 oscilaciones parciales produce la función $s_n(t)$:



La supresión de las oscilaciones parciales con frecuencias altas conduce al espectro de líneas de la tensión de salida $y(t)$. Aquí sólo se representan los módulos $|d_k|$.



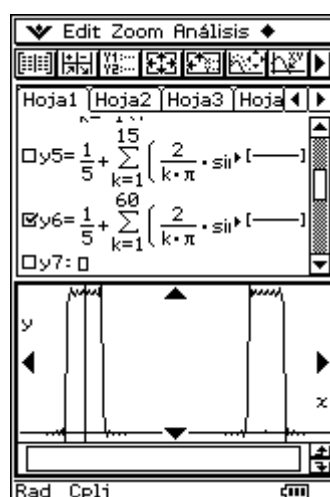
Transformación inversa como en el ejemplo anterior.

$$y(t) \approx y_{15}(t) = 1/5 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{15} \sin(k\pi/5) / (k\pi|1 + jk/2|) \cdot \cos(2k\pi t - \arctan(k/2))$$

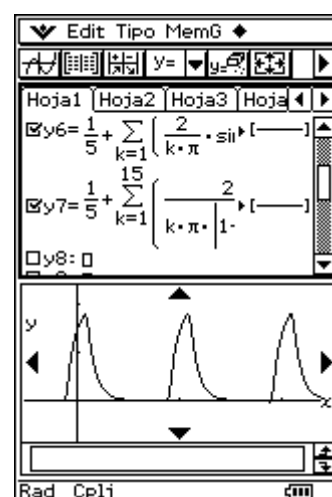
La función de aproximación $y_{15}(t)$ permite distinguir claramente la “carga” del elemento de transmisión durante los impulsos así como la descarga en la pausa entre los impulsos.

Filtrado de paso alto de la oscilación rectangular

La tensión de entrada $f(t)$ origina solamente oscilaciones parciales cuyas frecuencias son múltiplos impares de la frecuencia básica ω_1 .



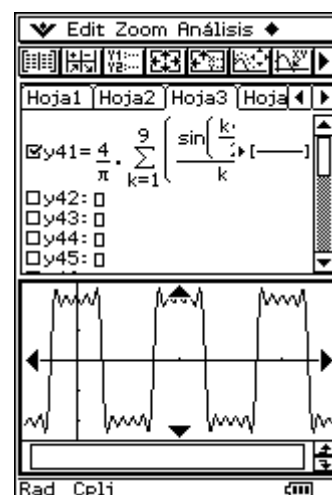
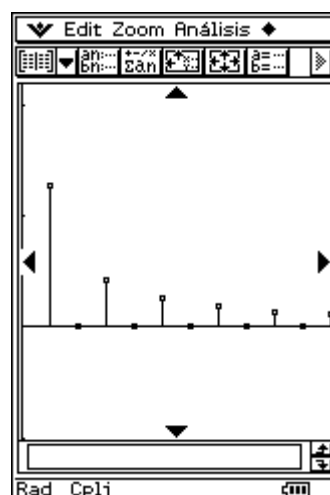
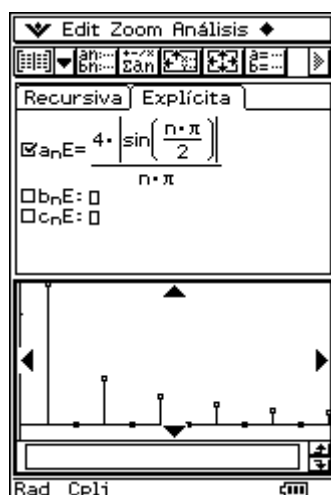
$s_5(t)$ (Entrada)



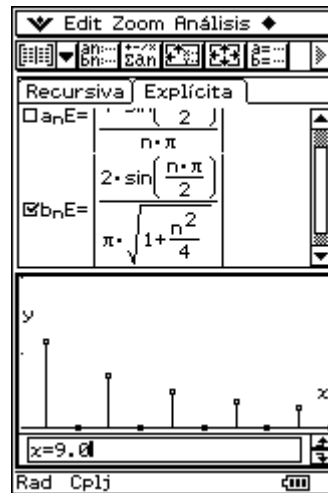
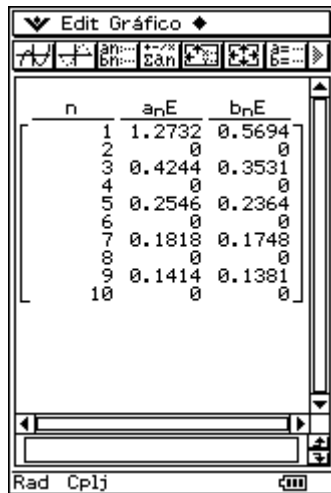
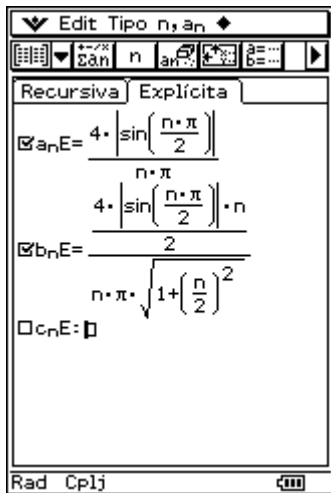
$y_5(t)$ (Salida)

En la representación elegida aquí (series de Fourier, ejemplo1, p. 82, cap. 13) se trata de oscilaciones cosenoidales con amplitudes $a_k = 4/(k\pi) \cdot \sin(k\pi/2)$.

A continuación se añade el espectro de líneas graficado en el menú Secuencia para los módulos $|a_k|$. La suma de 5 oscilaciones parciales produce la función de aproximación $s_n(t)$:



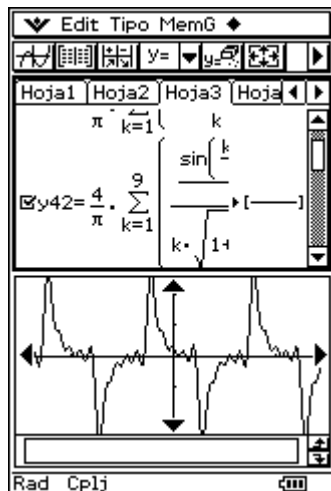
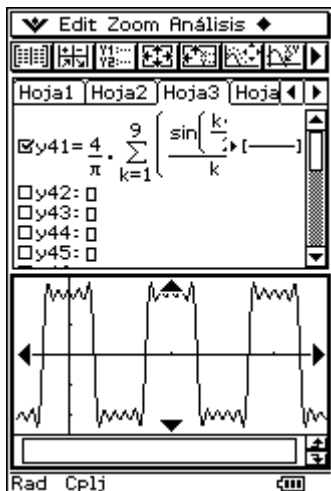
Mediante el filtrado de paso alto, las oscilaciones parciales con frecuencias bajas se amortiguan más que aquéllas con frecuencias más altas. El espectro de líneas muestra que la oscilación básica se ha vuelto más débil.



Transformación inversa como en los ejemplos anteriores:

$$y(t) \approx y_n(t) =$$

$$4 \cdot \sum_{k=1}^n \sin(k\pi/2)/(k\pi) \cdot (|jk/2|/|1+jk/2|) \cdot \cos(2k\pi t + \arg((jk/2)/(1+jk/2)))$$



La función de aproximación $y_9(t)$ permite ver que $y(t)$ reacciona a las ramas ascendentes o descendentes de $f(t)$ con “picos exponenciales” dirigidos hacia arriba o hacia abajo respectivamente. La “curvatura” de $s_n(t)$ afecta totalmente a $y_n(t)$ y sólo puede ser reducida mediante una cantidad significativamente mayor de oscilaciones parciales.

$s_9(t)$ (Entrada)

$y_9(t)$ (Salida)

Sugerencias bibliográficas

[1] Bartsch, H.-J.: *Taschenbuch Mathematischer Formeln*,
19ª Ed. 2001, Fachbuchverl. Leipzig, ISBN 3-446-21792-4

[2] CASIO: *ClassPad 300 – Bedienungsanleitung*, bearbeitet v. L. Paditz 2003,
cf.. <http://www.classpad.de/files/manualde.pdf> (671 p.)

[3] Clausert, H., Wiesemann, G.: *Grundgebiete der Elektrotechnik*,
Vol. 1 y Vol. 2,

8ª Ed. 2003, Oldenbourg-Verl., ISBN 3-486-27220-9 (Vol. 1)

8ª Ed. 2003, Oldenbourg-Verl., ISBN 3-486-27222-5 (Vol. 2)

[4] Paditz, L.: *Rechnen und graphische Darstellungen mit komplexen Zahlen*,
Anwendungsbeispiele aus Schule und Studium für den ALGEBRA FX2.0
Editorial CASIO Europe GmbH Norderstedt, 1ª Ed. 2001

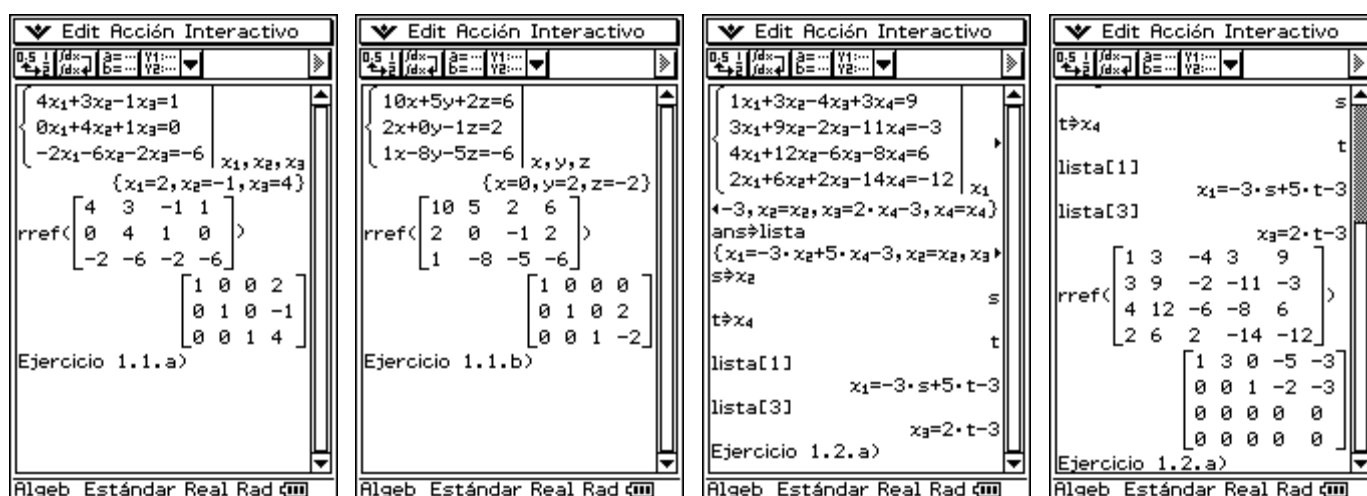
[5] Preuß, W., Wenisch, G.: *Lehr- und Übungsbuch Mathematik*, Vol. 2
(Analysis),

3ª Ed. 2003, Fachbuchverl. Leipzig, ISBN 3-446-22290-1

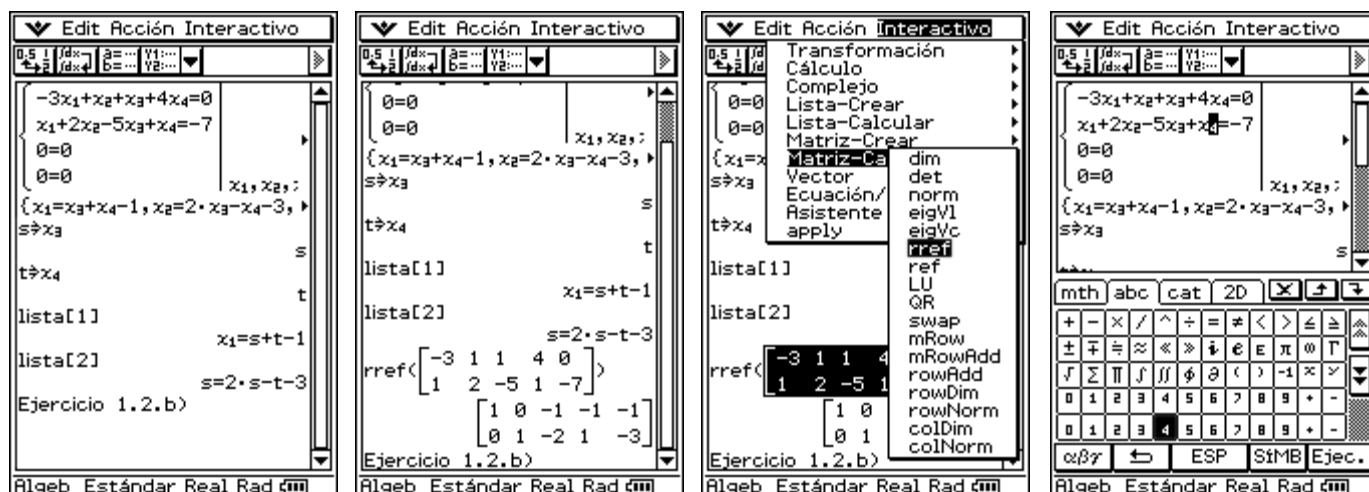
16 Sugereencias de soluciones a los problemas de ampliación de los capítulos individuales

16.1 Capítulo 1

S 1.1.a), b) y S 1.2.a), b): Preste atención a la utilización de máscaras de entrada **2D** en el teclado virtual  en el menú **2D** (): por ejemplo    a la especificación de máscaras matriciales.



La indexación de las variables x también tiene lugar usando el teclado virtual: abra  y escoja **MAT**.



La orden **rref(...)** puede ser aplicada sobre la matriz seleccionada mediante el menú **Interactivo**.

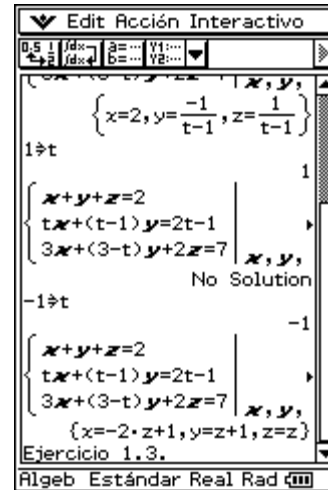
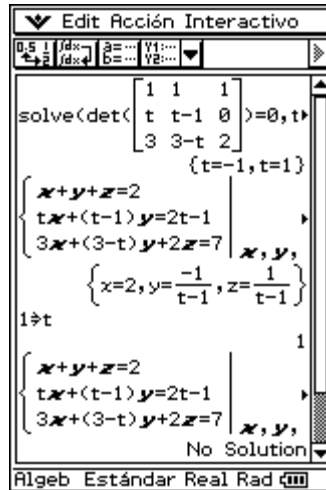
En los problemas 1.2.a) y b) se ha usado, además, la máscara de entrada **2D** para sistemas de ecuaciones lineales, donde el núm. de ecuaciones e incógnitas

ha de coincidir (por ejemplo mediante adjunción de ecuaciones ficticias $0 = 0$ y $0 = 0$). El resultado aquí se guardó en la Lista **lista**, y, tras la parametrización $s \Rightarrow x_3$ y $t \Rightarrow x_4$, fue invocado elemento a elemento, por ejemplo **list[1]**: $x_1 = s + t - 1$, etc.

S 1.3.a) El determinante de coeficientes da la sugerencia sobre la solución única $|t| \neq 1$.

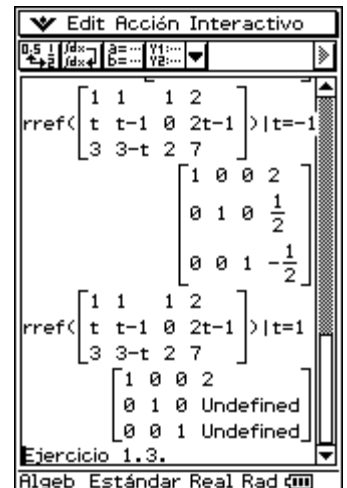
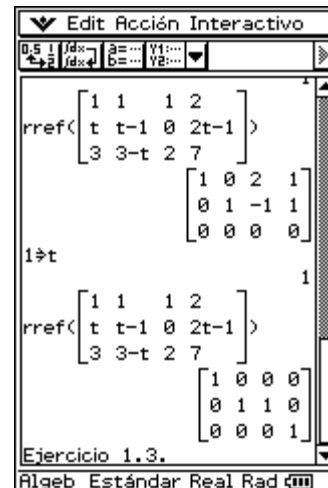
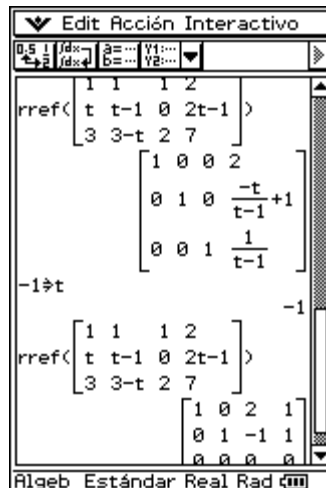
b) En el caso $t = 1$ no hay ninguna solución. Se puede borrar t en el Administrador de variables.

c) En el caso $t = -1$ hay una solución indeterminada. z podría parametrizarse.

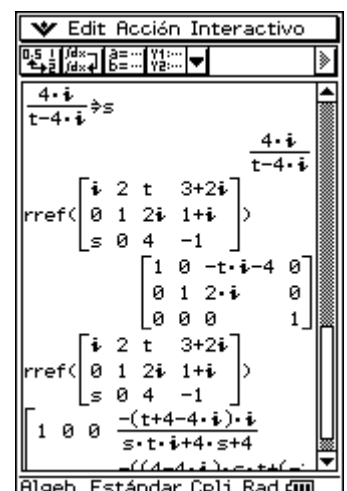
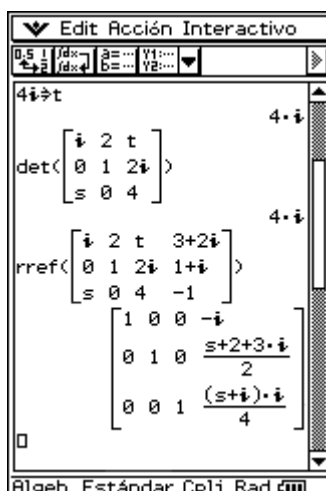
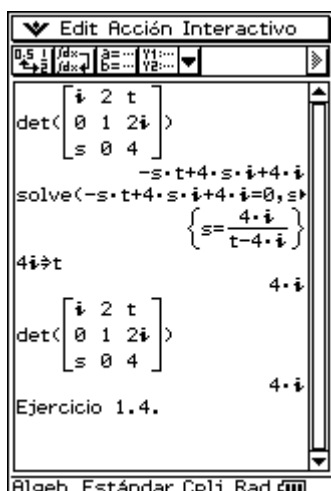


En el caso $t \neq 1$ la solución con la orden **rref(...)** da una solución única y, en el caso $t = 1$ una 'matriz resultado' contradictoria (Sistema Incompatible)

La solución ambigua en el caso $t = -1$ no se distingue en la tercera imagen!



S 1.4 Visualización de los resultados en el menú **Principal**. Primero se analiza el determinante de coeficientes:



Se distingue: solución única para $t = 4i$ (s , cualquier complejo) y ninguna solución para determinante de coeficientes $= 0$, es decir $s = 4i / (t - 4i)$ (en la orden **rref(...)** aparece como 3ª línea $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$).

The first screenshot shows the 'Adm. de variable' window with a 'Borrar' dialog box asking '¿Borrar variables?'. The second and third screenshots show the 'Edit Acción Interactivo' window with various matrix operations and determinants. The fourth screenshot shows the 'Edit Acción Interactivo' window with a matrix operation and a determinant calculation.

The first screenshot shows the 'Edit Acción Interactivo' window with a complex algebraic expression involving determinants and variables. The second screenshot shows the 'Edit Acción Interactivo' window with a matrix operation and a determinant calculation.

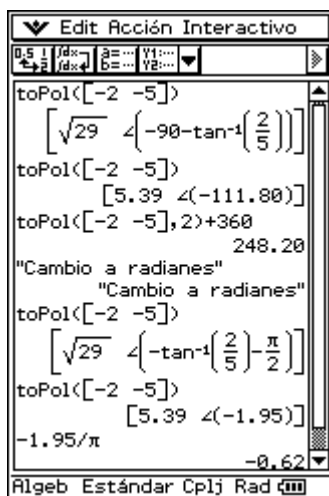
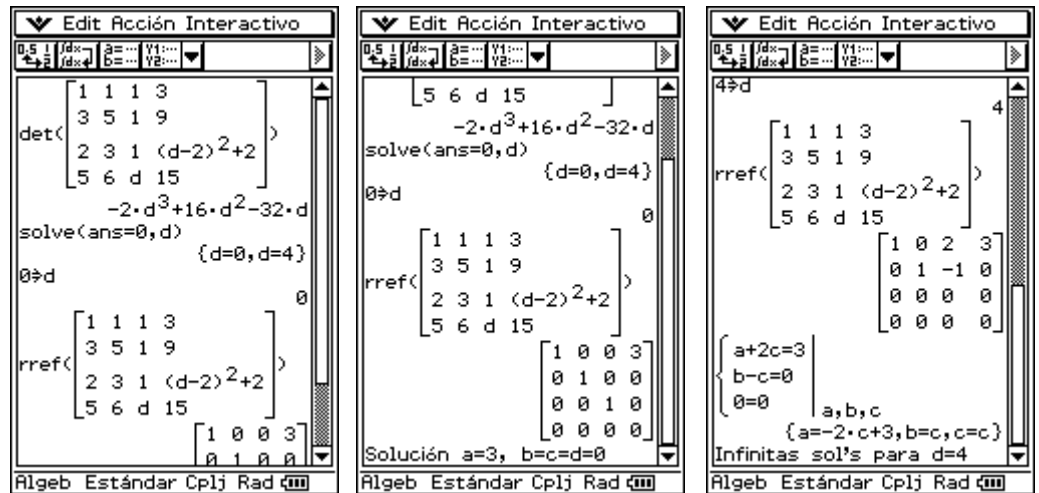
A continuación, desde el **Administrador de variables**, se borra la entrada para s , y en la orden **rref(...)** se calcula la solución única existente (dependiente de s y de t) en el caso determinante de coeficientes $\neq 0$, es decir $s \neq 4i / (t - 4i)$. La representación para z_2 es por ello un término de la fórmula largo y difícil de simplificar. Por eso, la solución se obtiene de nuevo mediante la regla de Cramer y es simplificada mediante las órdenes adecuadas como se ve a la izquierda.

S. 1.5: Visualización de los resultados en el menú **Principal**. Se presentan dos vías de solución:

The first screenshot shows the 'Edit Acción Interactivo' window with the results of the 'rref' command. The second screenshot shows the 'Edit Acción Interactivo' window with the results of the 'rref' command and the solution of the system of equations. The third screenshot shows the 'Edit Acción Interactivo' window with the results of the 'rref' command and the solution of the system of equations. The fourth screenshot shows the 'Edit Acción Interactivo' window with the results of the 'rref' command and the solution of the system of equations.

S.1.6: Visualización de los resultados en el menú **Principal** arriba a la derecha. El resultado **rref(...)** se desarrolla posteriormente.

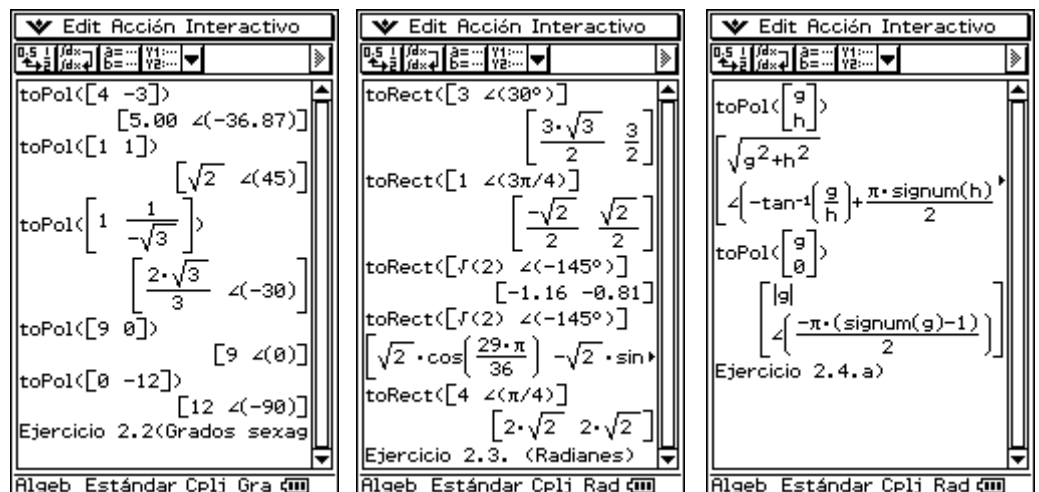
S1.7: Visualización de los resultados en el menú principal. En el caso $\det(\dots) \neq 0$ no hay soluciones.



16.2 Capítulo 2

S 2.1: Visualización de los resultados en el menú principal arriba a la derecha: a) $248,20^\circ$ (grados sexagesimales) b) $-0,62\pi$ (radianes)

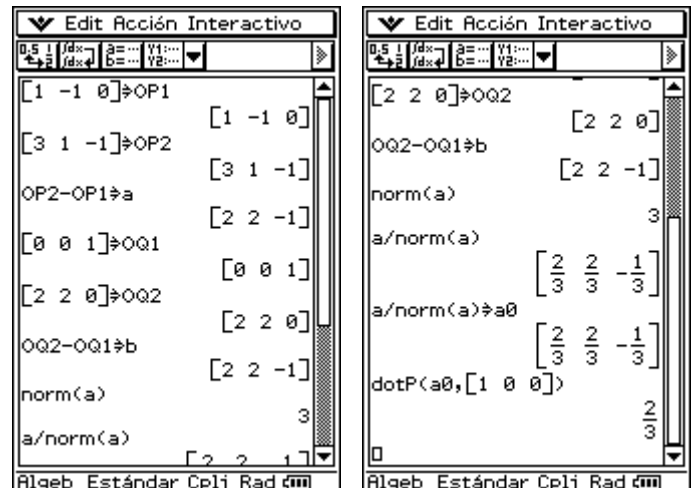
S 2.2-4: Visualización de los resultados en el menú **Principal**. Los vectores columna en el problema 2.2 se introducen aquí como vectores fila para poder visualizar más problemas en la ventana de visualización.

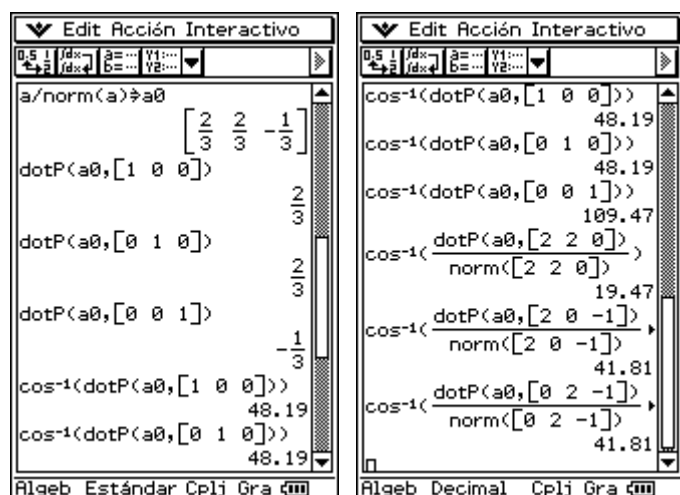


La solución óptima del problema 2.4 b) se obtiene mediante una diferenciación por casos de los cuadrantes individuales.

16.3 Capítulo 3

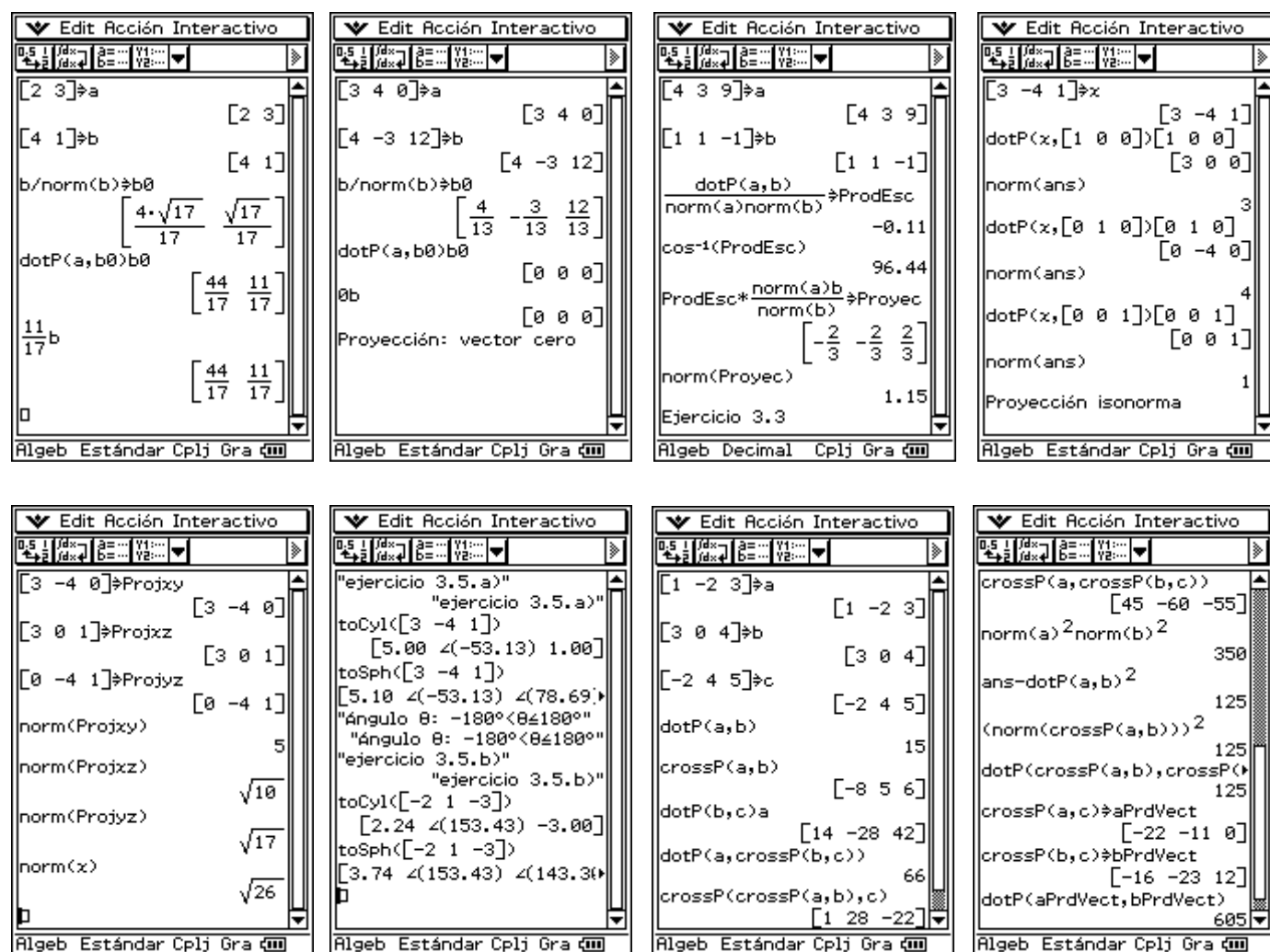
S 3.1: Visualización de los resultados en el menú **Principal**. Los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son idénticos.



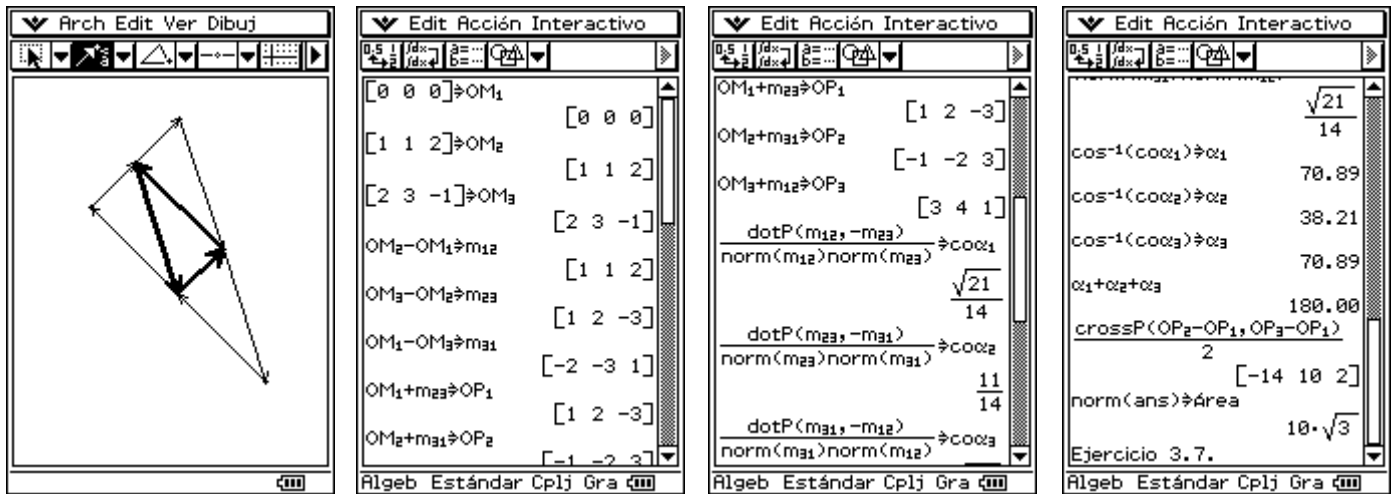


Los cosenos direccionales son las coordenadas del vector unitario $\vec{a}_0$, o sea, el producto escalar del vector unitario $\vec{a}_0$, y el respectivo vector unitario de una dirección de eje de coordenadas. Mediante la función **arccos** se obtienen los ángulos correspondientes. Los ángulos con el plano de coordenadas se obtienen mediante el vector normalizado $\vec{a}$ y su proyección normalizada en el respectivo plano de coordenadas. Debe preajustarse Grados Sexagesimales como modo angular.

S3.2-6: Visualización de los resultados en el menú **Principal**. El problema 3.4.b) se desarrolla análogamente a 3.4.a)

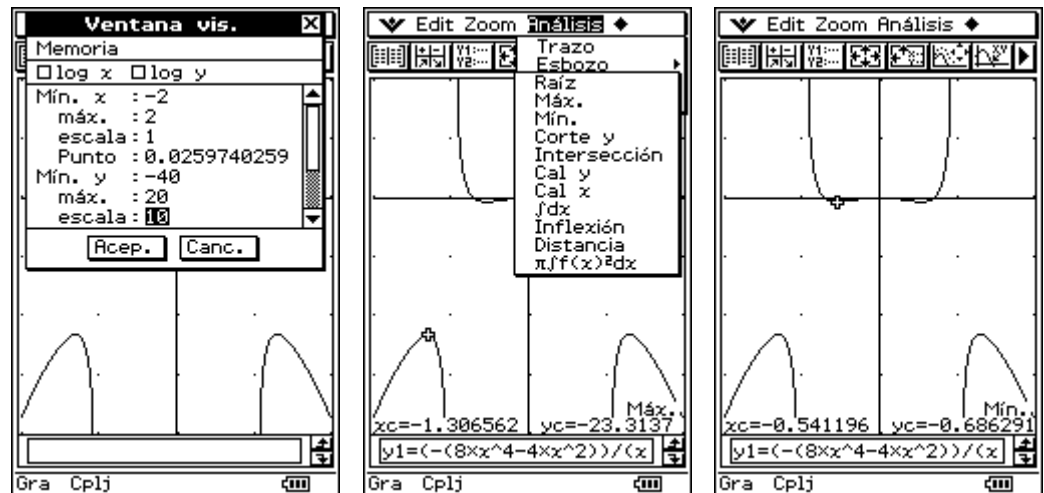


1.3.7: Esbozo básico en el menú **Geometría**; visualización de los resultados en el menú **Principal**.

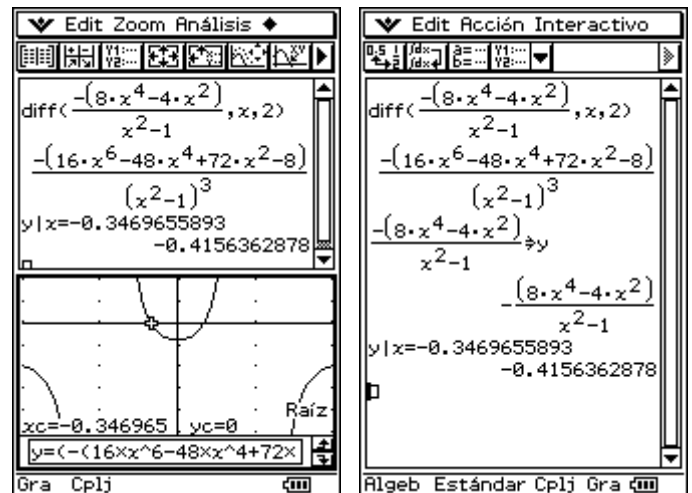


16.4 Capítulo 7

R 7.1: Visualización de los resultados en el menú **Principal** con Ventana Gráfica. El rango de valores se mantiene por debajo de $y_{\max} = -23,31$ y por encima de $y_{\min} = -0,69$. La abscisa del punto de inflexión es el cero de la 2ª derivada.

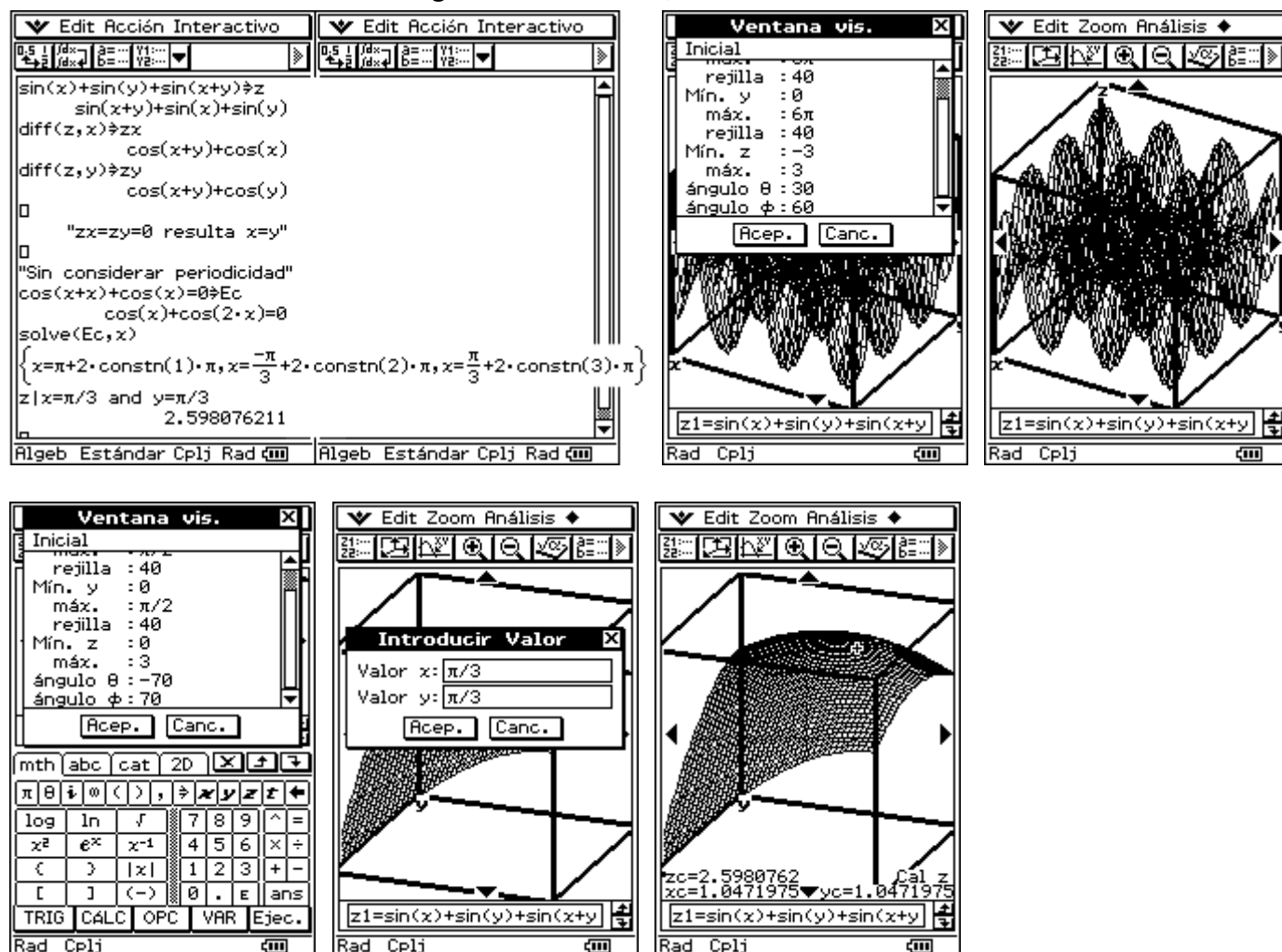


Para el problema 7.1: Cálculo de un punto de inflexión en el menú **Principal**.



16.5 Capítulo 8

S 8.1: Visualización de los gráficos en el menú **3D**: superficie de una caja de huevos grande con $z_{\max} = 2,598$.



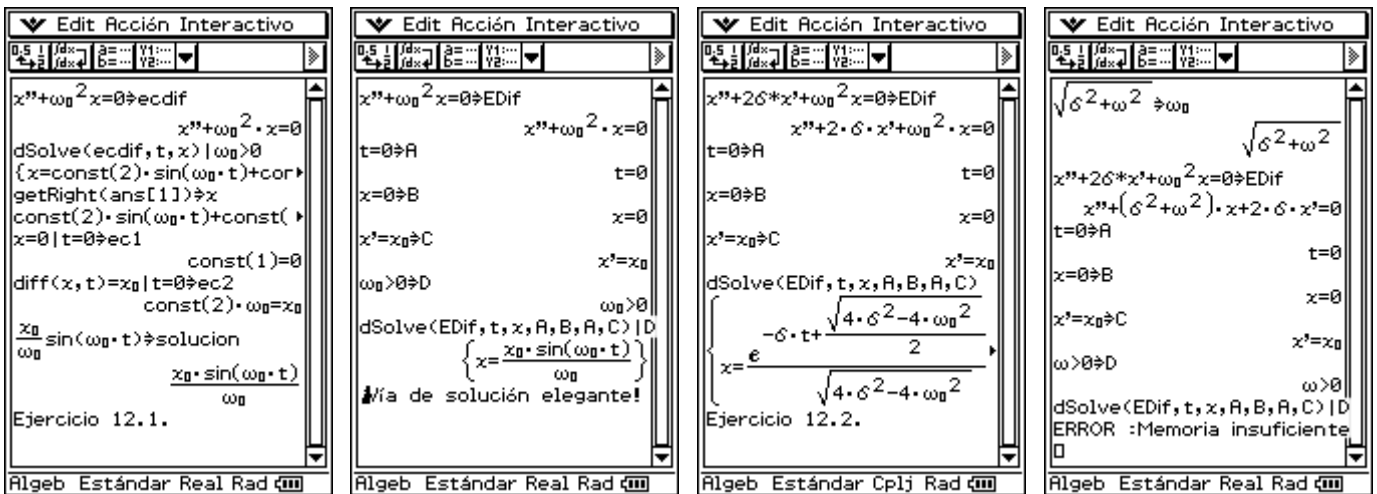
16.6 Capítulo 10



S 10.1-3: Visualización de los resultados en el menú **Principal** y en el menú **Secuencia**:

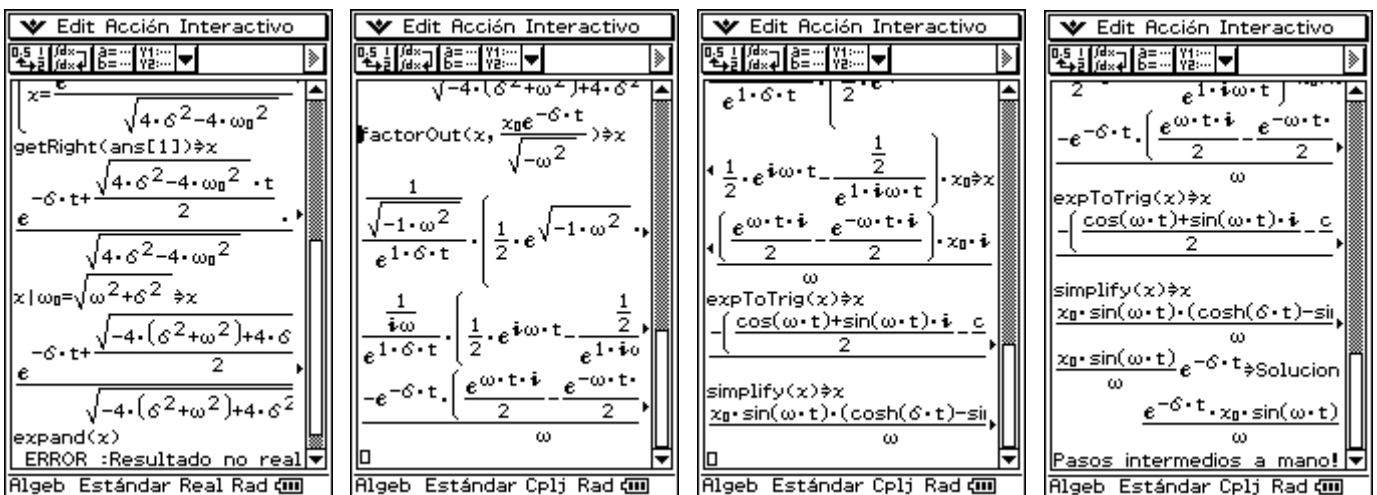
16.7 Capítulo 12

S 12.1-2: Visualización de los resultados en el menú **Principal** mediante la utilización de la orden **dSolve(...)**:



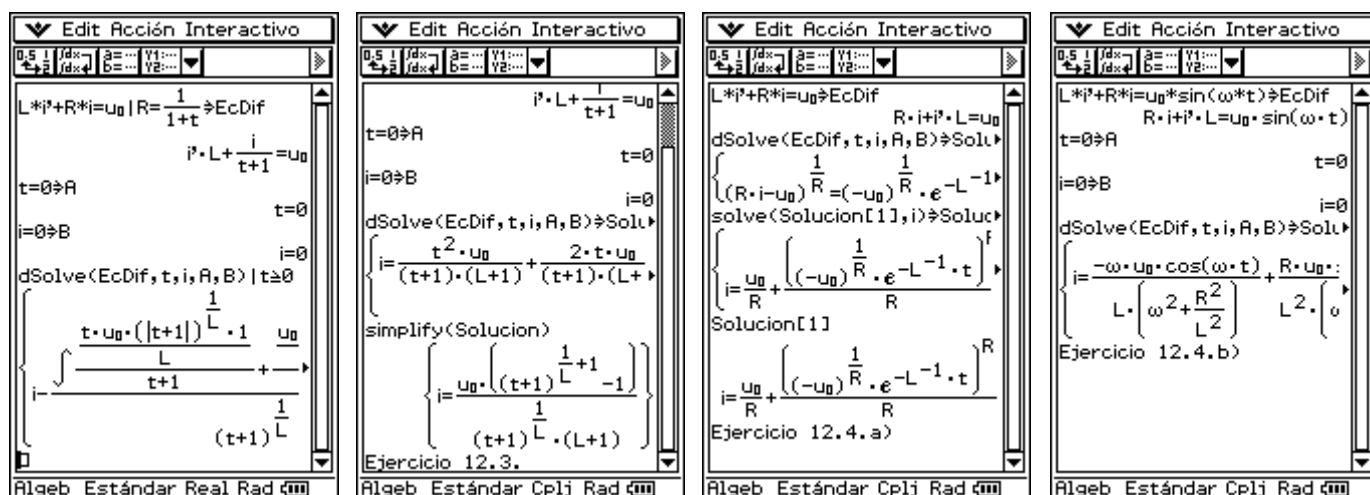
Se ven dos vías de solución al problema 12.1: en la imagen de la derecha se determina la solución principal y después se valoran las condiciones iniciales. A continuación se soluciona inmediatamente el problema del valor inicial, con la orden condicionada **dSolve(EDif,t,x,A,B,A,C)|D**.

Para el problema 12.2 está disponible la solución del problema del valor inicial con la orden **dSolve(EDif,t,x,A,B,A,C)**. Sin embargo, la orden condicionada **dSolve(EDif,t,x,A,B,A,C)|D** lleva entonces a un desbordamiento de memoria intermedia (buffer overflow). Por ello debe simplificarse en parte a mano el resultado obtenido anteriormente:



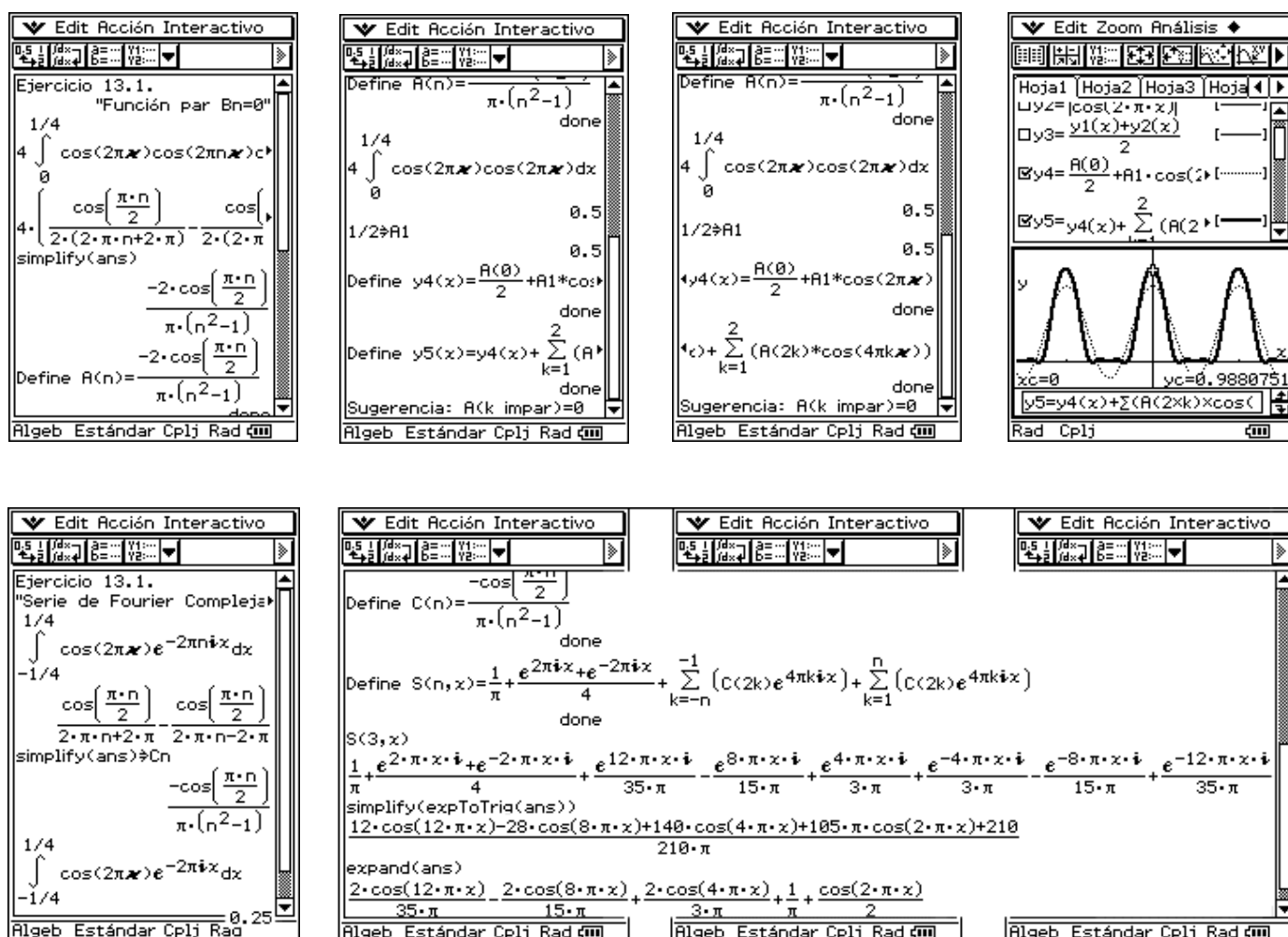
En la imagen de la izquierda se almacena en x el resultado, que se halla en formato lista. A continuación se substituye ω_0 y se factoriza con **factorOut(...)**. Los términos que se encuentran bajo la raíz, $-4(\delta^2 + \omega^2) + 4\delta^2$, se simplifican a mano hasta $-4\omega^2$. Para las siguientes transformaciones se alterna de **Modo-Real** a **Modo-Cplj**. Igualmente, el término de la raíz simplificado se ha reescrito a mano como $i\omega$. Finalmente se ha simplificado $\cosh(\delta t) - \sinh(\delta t)$ a $e^{-\delta t}$.

S 12.3-4: Visualización de los resultados en el menú **Principal** mediante la orden **dSolve(...)** (**Modo Cplj** !):

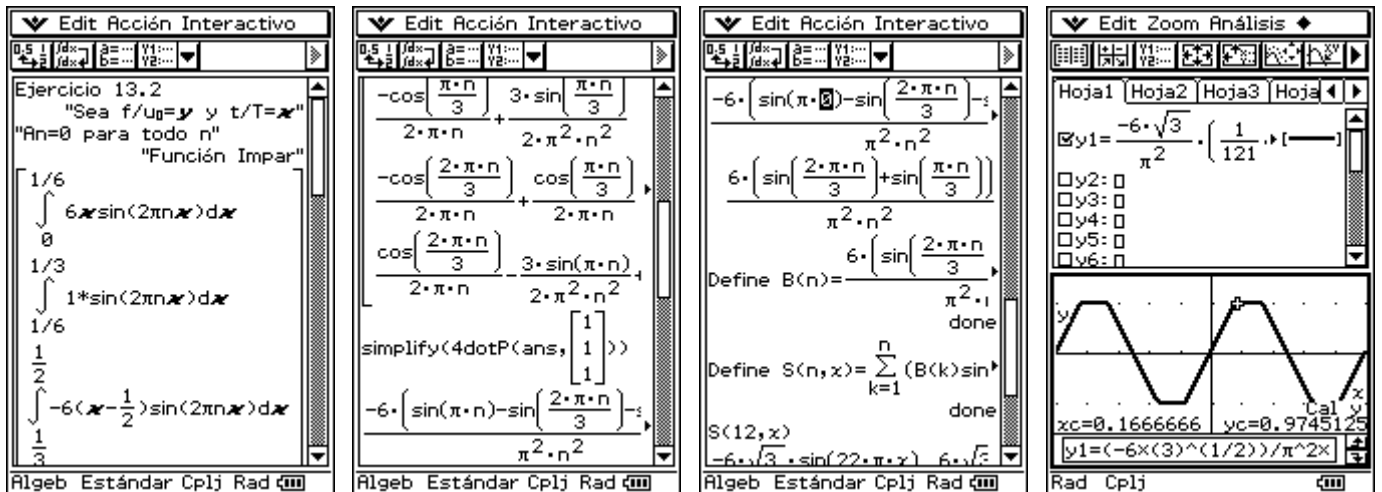


16.8 Capítulo 13

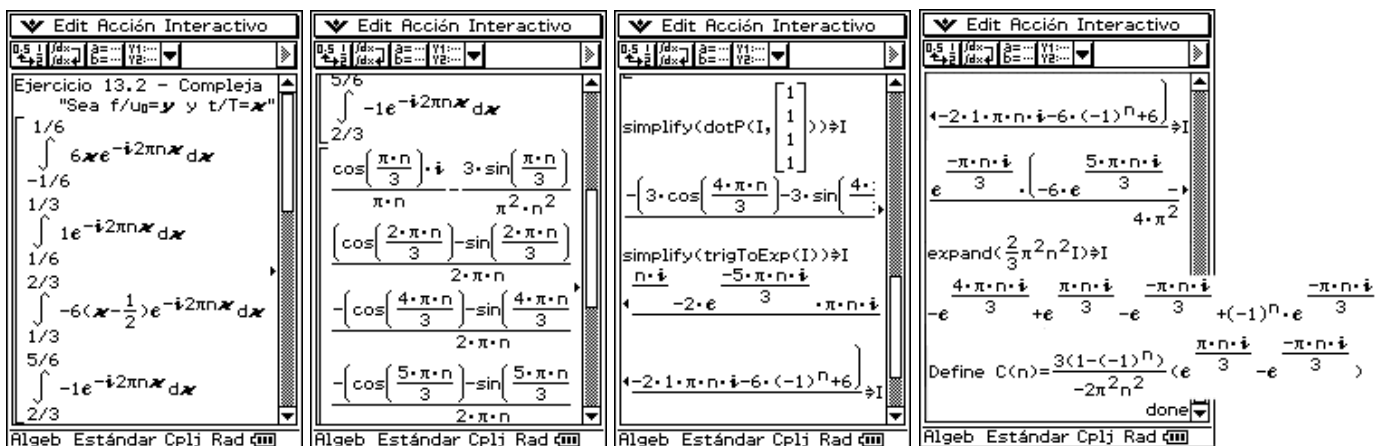
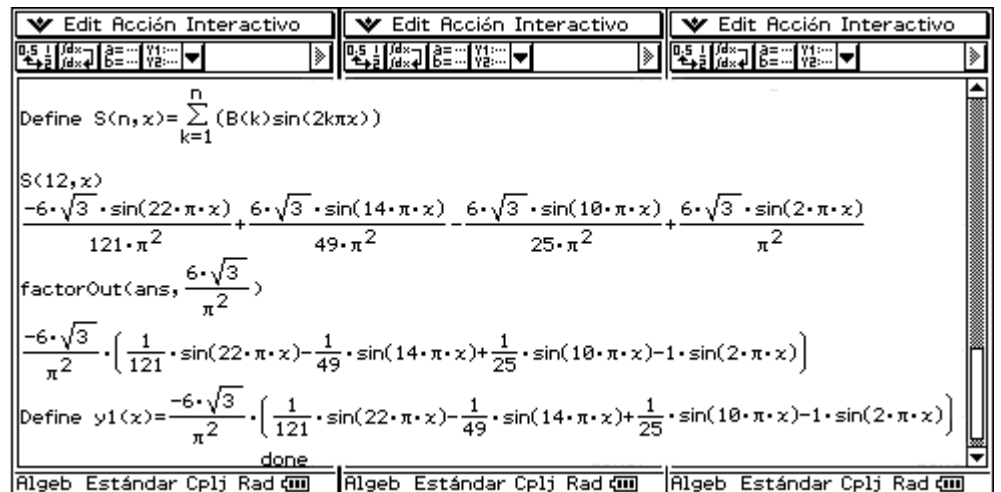
S 13.1 – 2: Visualización de los resultados en el menú **Principal** y en el menú **Gráficos&T...**:



En la imagen grande (arriba) se observa la transformación de la serie de Fourier compleja a la forma real.



En la imagen de la izquierda se describen formalmente, como componentes de un vector, las tres integrales parciales para el cálculo de $B(n)$. La suma (con factor 4) tiene lugar a través de un producto escalar. En la tercera imagen (arriba) $\sin(n\pi)$ se substituye a mano por $\sin(0\pi)$. Tras la definición de los coeficientes de Fourier, se define el polinomio de Fourier $S(n, x)$ y se grafica para $n = 12$.



Para la representación compleja debe integrarse para un período T completo. Las cuatro integrales parciales necesarias se calculan de nuevo como componentes de un vector simbólico, y después se suman mediante un producto escalar formal. Tras la simplificación `simplify(trigToExp(I))` los términos $e^{\pi ni}$ y $e^{2\pi ni}$ se fijan a mano a $(-1)^n$ y 1 respectivamente. La definición de $C(n)$ se simplifica nuevamente a mano mediante factorización de $e^{\pi ni/3}$ y $e^{-\pi ni/3}$, y,

después, factorización de $(1-(-1)^n)$. Los 12 primeros coeficientes de Fourier $C(k)$ y $C(-k)$ así como el polinomio de Fourier S son:

$$S = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin(14\pi x)}{49\pi^2} - \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin(10\pi x)}{25\pi^2} + \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin(2\pi x)}{\pi^2}$$

Indicación:
tiempos de cálculo
parcialmente largos.

16.9 Capítulo 14

$$\frac{3 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{3}\right)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

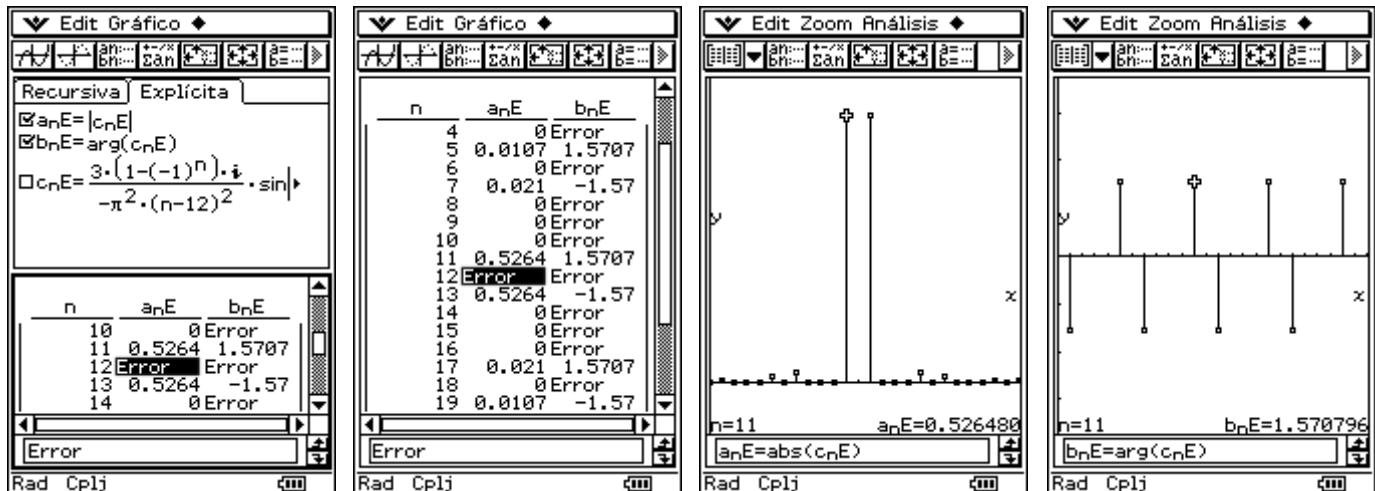
S 14.1: Primero se simplifica el coeficiente complejo de Fourier en el menú **Principal** y después se evalúa en el menú **Secuencias**.

A mano:

$$\cos((n+1)\pi) = (-1)^{n+1},$$

$$\sin((n+1)\pi) =$$

$$\sin((n+1)0) = 0.$$



Índice alfabético de palabras clave

A

Administrador de variables..... 8
 Algoritmo de
 Gauss 9 y sig., 14 y sig., 18
 Amortiguación crítica
 aperiódica 79
 Amortiguación crítica..... 93
 Amortiguación débil 81
 Arrastrar y soltar..... 80

B

Borrado de columnas 20
 Borrado de filas 20

C

Cálculo de Probabilidad 69
 Cálculo de vectores 22, 25, 30
 Cálculo hacia atrás 10, 11, 18
 Campo de entrada-2D..... 7, 8
 Cero 48, 50, 105
 Circuito eléctrico RL 81
 Circuito RCL 77, 92
 Columna pivote 19
 Combinación lineal 9, 17
 Comportamiento de soluciones del
 Sistema de Ecuaciones 9
 Configuración de la ventana de
 visualización 50
 Conversión 25
 Coordenadas cilíndricas 25
 Coordenadas esféricas 25
 Coordenadas
 polares..... 22, 25, 32, 33, 45
 Coseno direccional 28, 104
 Cuboide de visualización 55
 Curva trapezoidal 86, 90
 Curva..... 44
 Curvatura..... 50

D

Descomposición parcial de
 fracciones..... 61
 Determinante 12, 18
 Determinante de
 coeficientes..... 101, 102
 Discusión de curvas..... 48, 51, 53
 Drag & Drop 13, 80

E

Ecuación de Diferencia 67
 Ecuación de onda 77
 Ecuación de vectores 17
 Ecuación Diferencial 59, 77
 Ecuación Diferencial de
 Cauchy-Riemann 60
 Ecuación diferencial
 homogénea 80
 Ecuación diferencial lineal
 homogénea 77
 Ecuación diferencial
 no homogénea 80
 Ecuación matricial 16
 Editor de funciones 36, 45
 Editor de listas 41, 71
 Editor de programas 70
 Elipse 45
 Escalado logarítmico 39, 40, 43
 Espectro de amplitudes 89
 Espectro de fases 89
 Espectro de
 líneas 87, 89, 90, 95, 96
 Espiral exponencial 46

F

Filtrado 95, 96, 97
 Forma escalonada por filas.. 10, 14
 Forma escalonada
 reducida por filas 10 y sig.
 Forma escalonada..... 9, 10
 Formato de gráfico 37, 46
 Fórmula de Bayes 75
 Fórmula de la
 probabilidad total 75
 Fórmula recursiva 67, 68
 Función 82
 Función de regresión 41, 42
 Función de transmisión.. 91, 93, 95
 Función estocástica 46

G

Grados sexagesimales ... 22, 24, 32
 Gráfico-3D 54, 94

H

Hipérbola 45

I

Intersección
entre dos gráficos..... 43

L

Límites
del intervalo de búsqueda 53
Línea de contorno..... 64
Línea pivote 19
Línea sótano 19
Lista de residuos 43

M

Máscara de entrada 13, 100
Matriz 7
Matriz ampliada... 10 y sig., 16, 19
Matriz de coeficientes regular..... 7
Matriz de coeficientes singular.... 7
Matriz inversa 12, 16
Matriz unitaria 11, 16
Mensajes de error8
Menú de la
ventana de visualización..... 45
Ménú Gráficos & T..... 36, 48, 108
Menú mth..... 7, 24, 35, 45
Método de intercambio 18, 20
Modo angular..... 22, 24, 31, 32
Modo exacto 25
Modo standard 25

N

Norma del vector..... 23
Norma euclidiana 30
Norma Frobenius 30
Número complejo 31, 32
Número de Euler 68

O

Opción Intersección 44
Orden abs() 30, 35
Orden augment()..... 10, 12, 16
Orden crossP() 27
Orden dotP() 26
Orden dSolve().59, 77, 78, 80, 107
Orden ident()..... 16
Orden norm() 30
Orden ref() 7, 10, 11, 12, 14
Orden rref(). 7, 10 y sig., 100, 102
Orden sequence() 65
Orden solve() 12 y sig., 48, 53
Orden sumSeq() 65, 66

Orden swap()11
Orden trigToExp() 58
Orden trn() 10, 22, 27
Ordenes de la forma diagonal ... 11
Oscilación aperiódica..... 77
Oscilación
en diente de sierra 83, 87, 95
Oscilación en diente de sierra
exponencial..... 84, 88
Oscilación rectangular 82, 97

P

Paraboloide de rotación 56
Parámetro
del sistema de ecuaciones 9
Parámetros complejos 17
Parámetros reales 17
Paso alto 92, 95, 98
Paso bajo 91, 95, 96
Permutación de pivote 10
Polinomio
de pares de números dados..... 66
Polinomio de Taylor 37
Polo 50
Probabilidad condicionada 75
Problema de optimización 63
Problema del valor inicial 107
Producto cruz 27
Producto escalar 26
Producto externo 27
Producto vectorial 26, 27
Proyección 29
Punto de Inflexión 50, 52, 105
Punto de visualización..... 54

R

Radianes..... 22, 32
rand(0,1) 46, 47, 76
RandList(n,1,3) 76
Rango angular
Principal..... 23, 24, 25, 28, 33
Rango de la matriz 20
Regla de Cramer 11, 12
Regresión cuasilineal 41
Regresión potencial 40, 41
Representación de
parte real-parte imaginaria 34
Representación exponencial 33
Representación paramétrica 44

S

Señal estocástica	47
Señal periódica	47, 94
Serie de Fourier	82
Serie de Fourier compleja	109
signum()	24, 82, 85
Símbolo	
de grado sexagesimal °	24
Simbología de versor	32
Simulación	69, 70, 76
Sistema de ecuaciones	
de solución múltiple	17
Sistema de ecuaciones	
de solución múltiple.....	9
Sistema de ecuaciones	
equivalentes	9, 18
Sistema de ecuaciones	
irresoluble	9
Sistema de ecuaciones	
lineales.....	7, 9
Sistemas de ecuaciones	
cuasilineales	13
Sistemas de ecuaciones	
no lineales	13, 18, 62
Sobreamortiguación	77, 93
Sombreado aleatorio.....	47
Sucesión de pulsos	
estroboscópicos	85, 90, 96
Sucesión de sumas parciales	66
Sucesión numérica	65
Superficie en silla de montar.....	56
Superposición de ondas	77, 81

T

Tabla final	20
Tabla inicial	19
Tecla multiplicación,	
varios significados.....	27
Teclado virtual	7, 8, 24, 35, 68
Teclado virtual-2D	13
Teoría de Funciones	60
Teoría de la Probabilidad.....	75
Texto del programa	73
Transformación	
de coordenadas	22
Transformación	
en la notación aritmética	33
Transformación en la notación	
de pares de números	33

V

Variable de sistema entera	
constn	82
Vector solución.....	9, 11, 12
Ventana de visualización	37, 55
Ventana vis.	37
Versor	22, 23